

DETERMINAÇÃO DA FADIGA EM ESTRUTURAS METÁLICAS

SOLDADAS SUBMETIDAS A SOLICITAÇÕES DINÂMICAS

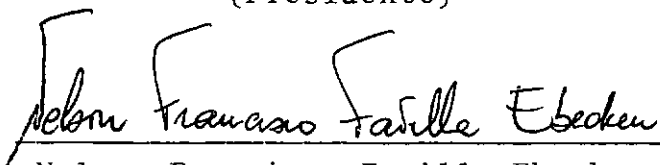
Ana Lúcia Fernandes Lima Torres

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL

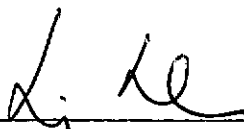
Aprovada por:



Edison Castro Prates de Lima
(Presidente)



Nelson Francisco Favilla Ebecken



Luiz Landau



Andrés Ludovico Halbritter

RIO DE JANEIRO, RJ — BRASIL

FEVEREIRO DE 1984

TORRES, ANA LÚCIA FERNANDES LIMA

Determinação da Fadiga em Estruturas Metálicas Soldadas Submetidas a Solicitações Dinâmicas (Rio de Janeiro) 1984.

xi, 224 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1984)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Fadiga 2. Aleatória I. COPPE/UFRJ
II. Título (série)

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Edison Castro Prates de Lima pela orien
tação dada a este trabalho e pelos ensinamentos e incentivos recebidos;

Aos Professores do Programa de Engenharia Civil da
COPPE/UFRJ pela colaboração e pelos ensinamentos transmitidos, em particular
aos Professores Nelson F.F. Ebecken e Luiz Landau;

Aos amigos e companheiros de estudo da COPPE, e a
Alvaro, Márcio, José Luiz e Gilberto Ellwanger, pela amizade e pelo apoio
dispensados;

Ao Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ;

Ao CNPq pelo auxílio financeiro concedido;

A Mariza V. Cortez Marote, Gilberto Luziê e Suely,
pela esmerada confecção gráfica deste trabalho.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

DETERMINAÇÃO DA FADIGA EM ESTRUTURAS METÁLICAS
SOLDADAS SUBMETIDAS A SOLICITAÇÕES DINÂMICAS

Ana Lúcia Fernandes Lima Torres

FEVEREIRO DE 1984

ORIENTADOR: Prof. Edison Castro Prates de Lima

PROGRAMA: Engenharia Civil

R E S U M O

Este trabalho tem por objetivo apresentar procedimentos de análise dinâmica para avaliação do dano provocado em juntas soldadas de estruturas metálicas, submetidas a solicitações dinâmicas de caráter determinístico ou aleatório, através do Método dos Elementos Finitos.

A análise determinística permite a obtenção da resposta permanente da estrutura no domínio da frequência, através do Método de Superposição Modal. Para frequências altas de excitação é empregado o Método Direto no domínio da frequência.

A análise aleatória permite obter a resposta de sistemas lineares submetidos a excitações de caráter ergódico associados a processos Gaussianos.

A avaliação do dano acumulado é feita através da Regra de Miner, determinando-se as tensões efetivas com uso dos fatores de concentração de tensões.

Elaborou-se um programa em linguagem FORTRAN, implementado no computador Burroughs 6700, que permite determinar a resposta de sistemas estruturais lineares às solicitações dinâmicas e avaliar a vida útil das juntas soldadas.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

FATIGUE ANALYSIS OF STEEL WELDED STRUCTURES
SUBJECTED TO DYNAMIC LOADING

Ana Lúcia Fernandes Lima Torres

February, 1984

CHAIRMAN: Prof. Edison Castro Prates de Lima

DEPARTMENT: Civil Engineering

A B S T R A C T

This work presents a procedure to the dynamic analysis for determination of fatigue damage occurring in welded tubular joints of steel structures submitted to deterministic and random loading, by the Finite Element Method.

The deterministic approach furnishes the steady-state response, in the frequency domain, by the Modal Superposition Method. For high exciting frequencies the Direct Method in the frequency domain is applied.

The random analysis furnishes the response of linear systems subjected to ergodic excitations, associated with Gaussian processes.

The total fatigue damage is determined by the

Miner's rule, applying the Stress Concentration Factors (SCF) for the hot-spot stress determination.

A computer program has been developed, using FORTRAN language and implemented in the Burroughs 6700. This program allows the determination of linear systems response to dynamic loading and the fatigue damage of welded tubular joints.

Í N D I C E

	Pág.
RESUMO.....	iv
ABSTRACT.....	vi
CAPÍTULO I	
INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II	
FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO.....	4
II.1 - Introdução.....	4
II.2 - Equações Diferenciais do Movimento.....	4
II.3 - Vibrações Livres.....	15
CAPÍTULO III	
ANÁLISE DINÂMICA DETERMINÍSTICA DE ESTRUTURAS.....	22
III.1 - Introdução.....	22
III.2 - Resposta Permanente (Steady-State) —	
Método de Superposição Modal.....	24
III.2.1 - Método de Superposição Modal.....	24
III.2.2 - Correção Estática dos Modos Superiores....	30
III.2.3 - Resposta Permanente (Steady-State).....	32
III.3 - Resposta Permanente para Altas Frequências —	
Método Direto.....	37

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DINÂMICA ALEATÓRIA DE ESTRUTURAS.....	43
IV.1 - Introdução.....	43
IV.2 - Conceitos Básicos de Análise: Aleatória.....	44
IV.2.1 - Processos Estacionários e ergódicos.....	44
IV.2.2 - Função Densidade de Probabilidade de 1 ^a Ordem.....	46
IV.2.3 - Valores Esperados para uma Variável.....	47
IV.2.4 - Função de Distribuição de Probabilidade.....	51
IV.2.5 - Função Densidade de Probabilidade de 2 ^a Ordem.....	52
IV.2.6 - Valor Esperado de uma Função de Duas Variáveis.....	57
IV.2.7 - Correlação e Covariância.....	57
IV.2.8 - Valores Esperados para n Variáveis Aleatórias.....	61
IV.2.9 - Função de Auto-Correlação e Correlação Cruzada.....	62
IV.2.10 - Densidade Espectral.....	66
IV.3 - Relação entre Excitação e Resposta.....	79
IV.3.1 - Relação entre Excitação e Resposta para Sistemas Lineares.....	79
IV.3.2 - Resposta a Excitações Aleatórias.....	85
IV.3.3 - Processos de Banda Estreita e Banda Larga...	94
IV.4 - Análise para Vários Graus de Liberdade.....	103

CAPÍTULO V

FADIGA.....	109
V.1 - Introdução.....	109
V.2 - Conceitos Básicos.....	110
V.3 - Fatores de Concentração de Tensões e "Hot-spot Stresses".....	114
V.4 - Curvas S-N.....	117
V.5 - Determinação do Dano e Vida Útil: Regra de Miner.....	118

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS.....	122
VI.1 - Introdução.....	122
VI.2 - Exemplo 1.....	124
VI.3 - Exemplo 2.....	138
VI.4 - Exemplo 3.....	152
VI.5 - Exemplo 4.....	163
VI.6 - Exemplo 5.....	167
VI.7 - Exemplo 6.....	176
VI.8 - Exemplo 7.....	181
VI.9 - Exemplo 8.....	185

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES.....	206
BIBLIOGRAFIA.....	210

APÊNDICE

A - Fórmulas semi-empíricas para fatores de concentração de tensões.....	218
---	-----

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO

Além da análise estática, normalmente aplicada para se determinar os esforços e deslocamentos em estruturas devido à ação de carregamento estático, a análise dinâmica, em muitos casos, assume também significativa importância, tornando-se cada vez mais necessária à medida em que as estruturas se tornam mais sofisticadas e/ou sensíveis aos efeitos dinâmicos, tais como usinas nucleares, estruturas marítimas, etc...

A descoberta de depósitos de petróleo em regiões marítimas, ocasionou a construção de plataformas offshore em profundidade crescente, ficando estas estruturas progressivamente sensíveis aos efeitos dinâmicos provocados por ações ambientais, tais como ventos e ondas do mar. Torna-se necessária, portanto, a aplicação de métodos adequados e técnicas específicas de análise dinâmica para a avaliação da resposta da estrutura.

A resposta da estrutura à ação do mar pode ser determinada através de uma análise dinâmica determinística, para pequenas profundidades, ou uma análise aleatória, à medida em que a profundidade aumenta, de forma a melhorar a representação das diversas ações ambientais a que as plataformas estão submetidas.

A análise dinâmica é aplicada, também, à superestrutura da plataforma, onde estão situados equipamentos me

cânicos funcionando a altas frequências de excitação e onde ocorre a ação de fenômenos ambientais, como o vento, cujas flutuações do carregamento se constituem num processo dinâmico aleatório necessário de ser considerado na verificação de estruturas esbeltas do tipo torre, etc...

A resposta da estrutura e seus componentes a solicitações dinâmicas é de grande importância, pois o efeito de flutuação do carregamento tende a provocar variações de tensões no material, cuja capacidade de suportar estas variações diminui acumulativamente com o número de flutuações, levando ao desenvolvimento e propagação de fissuras que se constitui no processo de fadiga.

O dano devido ao efeito de fadiga depende da história completa das tensões durante toda a vida útil da estrutura, sendo o seu cálculo e seus efeitos sobre o material de difícil determinação, devido à natureza irregular do carregamento, o tamanho e complexidade da estrutura, e à necessidade de se adotar um método de análise eficaz, que forneça resultados seguros sem grande esforço computacional.

Devido às dificuldades de acesso e aos custos de manutenção, torna-se necessário que as estruturas sejam devidamente dimensionadas de modo a evitar a ocorrência de colapso por processo de fadiga de seus componentes durante a vida útil esperada para operação. Muitos tipos de análise e procedimentos têm sido desenvolvidos de modo a se avaliar e prever o comportamento de uma estrutura no que diz respeito à fadiga, e neste trabalho são apresentadas técnicas de análise visando a determinação da fadiga através de métodos determinísticos e probabilísticos.

cos.

No Capítulo II, é deduzido o sistema de equações diferenciais do movimento para um sistema estrutural linear submetido a excitação dinâmica, discretizado pelo Método dos Elementos Finitos, e avaliam-se os modos de vibração da estrutura.

Para solicitações determinísticas de caráter periódico, desenvolve-se no Capítulo III, o método de avaliação da resposta através da Superposição Modal com a técnica da correção estática e o Método Direto para o caso de excitações com alta frequência.

A resposta de estruturas a solicitações de caráter aleatório é determinada no Capítulo IV, onde são apresentados os conceitos de análise aleatória.

No Capítulo V, apresentam-se procedimentos para avaliação do dano acumulado devido à fadiga e da vida útil de estruturas metálicas soldadas.

Finalmente, são analisados alguns exemplos de estruturas submetidas a carregamento dinâmico determinístico e aleatório, no Capítulo VI.

C A P Í T U L O I I

FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO

II.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentado o sistema de equações diferenciais do movimento de um sistema estrutural linear, discretizado pelo Método dos Elementos Finitos, utilizando-se para o desenvolvimento das equações o princípio variacional de Hamilton.

Serão abordados alguns aspectos importantes sobre características de convergência do Método de Elementos Finitos e sobre as matrizes de massa e amortecimento.

O Método de Iteração por Subespaço será rapidamente abordado, por ter sido utilizado na determinação dos modos de vibração, empregados como matriz de transformação no Método de Superposição Modal, no Capítulo III.

II.2 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO

Para um corpo deformável tri-dimensional, em equilíbrio dinâmico, o princípio de Hamilton (1,2) estabelece que, dentre todas as configurações possíveis que este corpo pode assumir, ao mudar da configuração 1 no tempo t_1 para a configuração 2 no tempo t_2 , aquela que satisfaz o equilíbrio em cada instante

é a que minimiza a integral do Lagrangeano durante este intervalo, ou seja:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T-U+W) dt = 0 \quad (\text{II.1})$$

onde

T é a energia cinética total do corpo

U é a energia potencial de deformação

W é o trabalho realizado por forças externas, incluindo amortecimento

δ é a variação durante o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$

Portanto, pelo princípio de Hamilton, a variação das energias cinética e potencial de deformação, mais a variação do trabalho realizado por forças externas durante um intervalo de tempo qualquer $[t_1, t_2]$, deve ser igual a zero.

Os termos da equação (II.1) podem ser expressos na forma matricial, como:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \, \underline{\dot{u}}^T \, \underline{\dot{u}} \, dV \quad (\text{II.2a})$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{\epsilon}^T \, \underline{D} \, \underline{\epsilon} \, dV \quad (\text{II.2b})$$

$$W = \int_V \underline{u}^T \, \underline{F}_V \, dV + \int_V \underline{u}^T \, \underline{F}_d \, dV + \int_S \underline{u}^T \, \underline{F}_S \, dS + \sum_i \underline{u}_i^T \, \underline{f}_i \quad (\text{II.2c})$$

onde

$\underline{u} = [u, v, w]^T$ é o vetor de deslocamentos variáveis no tempo.

$\underline{\dot{u}}$ é o vetor de velocidades obtido por derivação no tem

po do vetor \underline{u} .

$\underline{\epsilon} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz}]^T$ é o vetor das deformações.

\underline{D} é a matriz de elasticidade.

\underline{F}_v é o vetor das forças de massa no interior do corpo.

\underline{F}_d é o vetor de forças devidas ao amortecimento.

\underline{F}_s é o vetor das forças de superfície.

\underline{f}_i é o vetor de forças concentradas na direção dos deslocamentos \underline{u}_i .

ρ é a massa específica.

V o volume do corpo.

S representa a região da superfície do corpo onde atuam as forças de superfície.

Introduzindo as equações (II.2a), (II.2.b) e (II.2c) em (II.1) e desenvolvendo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_V \delta (\rho \dot{\underline{u}}^T \dot{\underline{u}} - \underline{\epsilon}^T \underline{D} \underline{\epsilon}) \, dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V \delta \underline{u}^T \underline{F}_v \, dV + \right. \\ \left. + \int_V \delta \underline{u}^T \underline{F}_d \, dV + \int_S \delta \underline{u}^T \underline{F}_s \, dS + \sum_i \delta \underline{u}_i^T \underline{f}_i \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (II.3)$$

A aplicação do Método dos Elementos Finitos requer a discretização do corpo em um número finito de sub-regiões denominadas elementos finitos ou simplesmente, elementos (5). Em cada elemento definem-se pontos denominados nós. As variáveis em cada ponto da sub-região, ou elemento, são aproximadas por intermédio das funções de interpolação, expressas em termos de parâmetros nodais.

As equações de movimento, para cada elemento, podem ser obtidas pela aplicação do princípio de Hamilton a cada elemento, cujo campo de deslocamentos pode ser expresso por:

$$\underline{u}^e = \underline{N} \underline{U}^e \quad (\text{II.4})$$

onde

\underline{u}^e é o vetor de deslocamentos de um ponto do elemento e

\underline{N} é a matriz que reúne as funções de interpolação

\underline{U}^e é o vetor dos deslocamentos nodais do elemento e

As deformações específicas são obtidas através da derivação dos deslocamentos. Desta forma, obtém-se a relação entre deformação e deslocamentos nodais:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{U}^e \quad (\text{II.5})$$

onde

$\underline{\varepsilon}$ é o vetor de deformações de um ponto do elemento e

\underline{B} é a matriz que reúne as funções de interpolação obtidas através de derivação conveniente de \underline{N}

Introduzindo (II.4) e (II.5) em (II.3), chega-se a:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^t 2 \left[\delta \dot{\underline{U}}^{e,T} \int_V \rho \underline{N}^T \underline{N} dV \dot{\underline{U}}^e - \right. \\ & \quad \left. - \delta \underline{U}^{e,T} \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \underline{U}^e + \right. \\ & \quad \left. + \delta \underline{U}^{e,T} \int_V \underline{N}^T \underline{F}_V dV + \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta \underline{U}^{e,T} \int_V \underline{N}^T \underline{F}_d \, dV + \\
& + \delta \underline{U}^{e,T} \int_S \underline{N}^T \underline{F}_s \, dS + \delta \underline{U}^{e,T} \underline{f} \Big] \, dt = 0 \quad (II.6)
\end{aligned}$$

Integrando-se por partes o primeiro termo da equação (II.6), resulta:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \delta \dot{\underline{U}}^{e,T} \left(\int_V \rho \underline{N}^T \underline{N} \, dV \right) \dot{\underline{U}}^e \, dt = \\
& = \left(\delta \underline{U}^{e,T} \int_V \rho \underline{N}^T \underline{N} \, dV \dot{\underline{U}}^e \Big|_{t_1}^{t_2} \right) - \int_{t_1}^{t_2} \delta \underline{U}^{e,T} \left(\int_V \rho \underline{N}^T \underline{N} \, dV \right) \ddot{\underline{U}}^e \, dt \quad (II.7)
\end{aligned}$$

A primeira parcela do lado direito da equação é nula, pois o princípio de Hamilton requer que os deslocamentos sejam prescritos nos instantes t_1 e t_2 , isto é:

$$\delta \underline{U}^e \Big|_{t_1} = \underline{U}^e \Big|_{t_2} = 0 \quad (II.8)$$

As forças de amortecimento \underline{F}_d podem ser consideradas proporcionais às velocidades, sendo expressas por:

$$\underline{F}_d = -\mu \dot{\underline{U}} = -\mu \underline{N} \dot{\underline{U}}^e \quad (II.9)$$

onde

μ é o coeficiente de amortecimento viscoso.

Substituindo-se (II.9) e (II.7) em (II.6), resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \underline{U}^{e,T} \left[\int_V \rho \underline{N}^T \underline{N} dV \ddot{\underline{U}}^e + \int_V \mu \underline{N}^T \underline{N} dV \dot{\underline{U}}^e + \right. \\ \left. \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \underline{U}^e - \int_V \underline{N}^T \underline{F}_V dV - \int_S \underline{N}^T \underline{F}_S dS - \underline{f} \right] dt = 0 \quad (\text{II.10})$$

Como as variações $\delta \underline{U}^{e,T}$ são arbitrárias, a expressão entre colchetes deve ser nula, resultando para o elemento:

$$\underline{M}^e \ddot{\underline{U}}^e + \underline{C}^e \dot{\underline{U}}^e + \underline{K}^e \underline{U}^e = \underline{f}^e \quad (\text{II.11})$$

onde \underline{M}^e , \underline{C}^e e \underline{K}^e são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do elemento, e \underline{f}^e é o vetor de forças nodais equivalentes do elemento, ou seja:

$$\underline{M}^e = \int_V \rho \underline{N}^T \underline{N} dV \quad (\text{II.12})$$

$$\underline{C}^e = \int_V \mu \underline{N}^T \underline{N} dV \quad (\text{II.13})$$

$$\underline{K}^e = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \quad (\text{II.14})$$

$$\underline{f}^e = \int_V \underline{N}^T \underline{F}_V dV + \int_S \underline{N}^T \underline{F}_S dS + \underline{f} \quad (\text{II.15})$$

A equação diferencial matricial, que expressa o equilíbrio dinâmico do corpo como um todo, é obtida pela associação das equações para todos os elementos, resultando em:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{C} \dot{\underline{U}} + \underline{K} \underline{U} = \underline{F} \quad (\text{II.16})$$

onde

$$\underline{M} = \sum_{i=1}^{NE} \int_V \rho \underline{N}^T \underline{N} dV \quad (\text{II.17})$$

$$\underline{C} = \sum_{i=1}^{NE} \int_V \mu \underline{N}^T \underline{N} dV \quad (\text{II.18})$$

$$\underline{K} = \sum_{i=1}^{NE} \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dv \quad (\text{II.19})$$

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{NE} \left[\int_V \underline{N}^T \underline{F}_V dV + \int_S \underline{N}^T \underline{F}_S dS + \underline{f} \right] \quad (\text{II.20})$$

\underline{U} é o vetor contendo os deslocamentos nodais, variáveis no tempo, da malha de elementos em que foi discretizado o corpo.

$\dot{\underline{U}}$ e $\ddot{\underline{U}}$ são, respectivamente, os vetores de velocidades e acelerações nodais variáveis no tempo.

As matrizes de massa e amortecimento são chamadas de consistentes, por terem sido obtidas utilizando-se para sua formação as mesmas funções de interpolação usadas para a formação da matriz de rigidez.

Através da equação (II.16), observa-se que a aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise dinâmica de uma estrutura, requer, inicialmente, a discretização do domínio da estrutura em um número finito de elementos, que constituem uma malha, definindo os pontos nodais e os deslocamentos que representam os graus de liberdade da estrutura. A seguir, são definidas as propriedades físicas de cada elemento, através das matrizes de rigidez, amortecimento e massa. Através da soma das contribuições destas matrizes, chega-se às matrizes \underline{M} , \underline{C} e \underline{K} que

contêm as propriedades de toda a estrutura. Da mesma forma é construído o vetor \underline{F} que contém as cargas externas que atuam sobre o elemento.

Um aspecto importante do Método dos Elementos Finitos se refere às funções de interpolação \underline{N} utilizadas na formação das matrizes dos elementos, pois delas depende a exatidão da solução. Para garantir a convergência do método, a aproximação para o elemento, ou seja, a função de interpolação, deve satisfazer condições de compatibilidade e completidade, que implicam em (5,7,10):

(a) *COMPATIBILIDADE* — deve existir continuidade entre os elementos para os deslocamentos e suas derivadas até a ordem $n-1$, onde n é a ordem da derivada mais alta que aparece no funcional. Caso a derivada de ordem mais alta seja uma derivada primeira, apenas os deslocamentos devem ser contínuos.

(b) *COMPLETIDADE* — quando as dimensões do elemento diminuem, tornando-se infinitesimal, as derivadas existentes no funcional tendem a valores constantes. A condição de completidade exige que a função de interpolação para o elemento seja capaz de representar, no limite, essas derivadas constantes. Na prática, esta condição é verificada se a aproximação incluir todos os modos de movimento de corpo rígido e todos os estados de deformação específica constante.

Os elementos que satisfazem totalmente às condições de compatibilidade e completidade são denominados conformes. Aqueles que violam parcialmente a condição de compatibilidade, e mesmo assim apresentam características convergentes, são

denominados não-conformes.

No presente trabalho, são utilizados os seguintes elementos:

- (a) elemento de pórtico espacial
- (b) elemento retangular de casca poliédrica, em cuja formação entram o elemento retangular para estado plano de tensões com variação linear de deslocamentos e o elemento retangular não-conforme para flexão de placas (RGCP) (60)
- (c) elemento triangular de casca poliédrica, em cuja formação entram o elemento triangular para estado plano de tensões com deformações constantes e o elemento triangular não-conforme para flexão de placas (TRGCP) (60)

Outro aspecto que deve ser analisado é o que se refere às matrizes de massa e amortecimento. Como já foi dito, estas matrizes são denominadas consistentes por terem sido utilizadas em sua formação as funções de interpolação N utilizadas na matriz de rigidez. Analisando-se inicialmente o caso da matriz de massa, verifica-se que é uma matriz cheia, tendo a mesma configuração da matriz de rigidez. Uma maneira mais simples de se gerar a matriz de massa, consiste em se concentrar a massa total nos pontos onde estão definidos os graus de liberdade translacionais, sendo estes pontos os nós da estrutura discretizada em elementos. Desta forma, a massa total concentrada num nó da estrutura é a soma das contribuições de todos os elementos ligados àquele nó, resultando numa matriz de massa diagonal, do tipo

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & m_3 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & m_N \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

contendo tantos termos na diagonal quanto o número de graus de liberdade do sistema estrutural. Os termos fora da diagonal desa parecem pois a aceleração imposta num ponto nodal produz forças de inércia apenas neste ponto. Normalmente não se considera mas-sa nos graus de liberdade rotacionais.

Comparando-se os dois tipos de matrizes de massa, verifica-se que a forma diagonal permite uma solução mais rápida, com maior economia de memória. No entanto, em alguns cas-sos, pode ser recomendável a utilização da matriz consistente de acordo com as referências bibliográficas (1, 3-9).

A formulação da matriz de amortecimento, como foi apresentada em (II.18), depende do fornecimento de um parâ-metro de amortecimento específico associado a cada elemento. Este parâmetro é difícil e muitas vezes impossível de ser especifi-cado, pois o amortecimento de uma estrutura real depende de uma série de diferentes e complexos mecanismos de dissipação inter-na de energia, de radiação e interação com o meio que a envolve. Na prática da solução dos problemas de engenharia, procura-se representar os conjuntos de mecanismos de dissipação de energia, através de amortecimentos equivalentes. Estes amortecimentos podem ser do tipo viscoso e serem expressos como percentagens de amortecimento crítico associado aos modos de vibração da estrutu-ra ou aplicados como amortecedores discretos aos graus de liber-

dade da mesma. Quando o amortecimento equivalente é expresso sob a forma de porcentagens do amortecimento crítico correspondente a cada modo de vibração, a matriz do amortecimento pode ser construída ortogonal aos modos de vibração:

$$\phi_i^T C \phi_i = 2\omega_i \xi_i \delta_{ij} \quad (\text{II.22})$$

onde

ϕ_i é o vetor do modo de vibração i

ω_i é a frequência natural relativa ao modo de vibração i

ξ_i é a porcentagem do amortecimento crítico relativo ao modo i

δ_{ij} é o delta de Kronecker

Esta formulação é útil quando da aplicação do Método de Superposição Modal, como será visto no item III.2.1.

Voltando ao sistema de equações diferenciais (II.16), pode-se verificar que há duas situações onde há interesse de análise:

(a) $\underline{F}(t) = \underline{0}$ e $\underline{C} = \underline{0} \rightarrow$ é o caso das vibrações livres, cuja solução do sistema implica na determinação dos modos de vibração e das frequências naturais.

(b) $\underline{F}(t) \neq \underline{0} \rightarrow$ é o caso das vibrações forçadas.

No item II.3 será estudado, rapidamente, o caso (a), que trata da determinação dos modos de vibração da estrutura, que serão utilizados, no item III.2, deste trabalho, no desenvolvimento do Método de Superposição Modal.

O caso (b) será abordado nos Capítulos III e IV, que tratam da análise dinâmica determinística e aleatória, respectivamente.

II.3 - VIBRAÇÕES LIVRES

Neste item será apresentado o Método de Iteração por Subespaço, desenvolvido por Bathe (3,4), para a solução do problema de autovalor. Este método é considerado, atualmente, um dos mais eficientes para solução de problemas estruturais com muitos graus de liberdade, no que diz respeito ao tempo de processamento e ao uso de memória do computador.

As equações diferenciais do movimento, para o caso das vibrações livres, são obtidas de (II.16) fazendo-se:

$$\underline{F} = \underline{0} \quad \text{e} \quad \underline{C} = \underline{0},$$

resultando em:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{K} \underline{U} = \underline{0} \quad (\text{II.23})$$

cujas soluções podem ser do tipo

$$\underline{U} = \underline{\phi} (\cos \omega t + \theta) \quad (\text{II.24})$$

onde ω é uma frequência natural de oscilação

$\underline{\phi}$ é um vetor de amplitudes máximas dos deslocamentos

θ é um ângulo de fase

Substituindo (II.24) em (II.23), resulta em:

$$\underline{K} \underline{\phi}_i = \omega_i^2 \underline{M} \underline{\phi}_i, \quad i = 1, n \quad (\text{II.25})$$

que é a equação de um problema de autovalor, cuja solução fornece um conjunto de n pares de autovalores e autovetores $(\omega_i^2, \underline{\phi}_i)$, $i = 1, n$, onde n é o número de graus de liberdade da estrutura, discretizada pelo Método dos Elementos Finitos. Os autovetores apresentam a propriedade de ortonormalidade em relação às matrizes de massa e rigidez:

$$\underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{\phi}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

$$\underline{\phi}_i^T \underline{K} \underline{\phi}_j = \begin{cases} \omega_i^2 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

Esta propriedade pode ser demonstrada, reunindo-se os n autovetores $\underline{\phi}_i$ na matriz modal $\underline{\Phi}$ e os autovalores correspondentes, ω_i^2 , na matriz diagonal $\underline{\Lambda}$:

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_2 & \cdots & \underline{\phi}_n \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \omega_3^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

ordenados em ordem crescente, ou seja,

$$(\omega_1^2 < \omega_2^2 < \cdots < \omega_n^2)$$

Portanto, as n equações (II.25) podem ser reescritas como:

$$\underline{K} \underline{\Phi} = \underline{M} \underline{\Phi} \underline{\Lambda} \quad (\text{II.30})$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação (II.30) por $\underline{\phi}^T$, obtém-se:

$$\underline{\phi}^T \underline{K} \underline{\phi} = \underline{\phi}^T \underline{M} \underline{\phi} \underline{\Lambda} \quad (\text{II.31})$$

Sendo \underline{K} e \underline{M} simétricas, $\underline{\phi}^T \underline{K} \underline{\phi}$ e $\underline{\phi}^T \underline{M} \underline{\phi}$ também o são (4). Analisando-se a equação (II.31), verifica-se que ela indica que uma matriz simétrica é igual ao produto de uma matriz simétrica por uma matriz diagonal. Isto será verdade se $\underline{\phi}^T \underline{K} \underline{\phi}$ e $\underline{\phi}^T \underline{M} \underline{\phi}$ forem, também, diagonais. Pode-se escrever que:

$$\underline{\phi}^T \underline{K} \underline{\phi} = \begin{bmatrix} k_{ii} \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

$$\underline{\phi}^T \underline{M} \underline{\phi} = \begin{bmatrix} m_{ii} \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

As equações (II.32) e (II.33) representam as matrizes de massa e rigidez generalizadas. Se os autovetores forem normalizados em relação à matriz de massa, chega-se a:

$$\underline{\phi}^T \underline{M} \underline{\phi} = \underline{I} \quad (\text{II.34})$$

$$\underline{\phi}^T \underline{K} \underline{\phi} = \underline{\Lambda} \quad (\text{II.35})$$

onde

\underline{I} é a matriz identidade

A análise dos resultados obtidos permite concluir que, em consequência da ortogonalidade, os autovetores são linearmente independentes, formando uma base no espaço vetorial de definição de \underline{K} e \underline{M} . Daí a vantagem de sua utilização como base de transformação de coordenadas, para a resolução do sistema de equações (II.16).

Para determinação das frequências naturais e modos de vibração, ou seja, para se obter a solução do problema de autovalor (II.30) será utilizado, como já foi dito anteriormente, o Método de Iteração por Subespaço.

O objetivo do método consiste na determinação dos "r" primeiros autovetores e autovalores que satisfazem às equações:

$$\underline{K} \underline{\phi} = \underline{M} \underline{\phi} \underline{\Lambda} \quad (\text{II.30})$$

$$\underline{\phi}^T \underline{K} \underline{\phi} = \underline{\Lambda} \quad (\text{II.34})$$

$$\underline{\phi}^T \underline{M} \underline{\phi} = \underline{I} \quad (\text{II.35})$$

onde

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_r^2 \end{bmatrix} \quad \text{é a matriz que contém os } r$$

primeiros autovalores, que correspondem aos quadrados das r mais baixas frequências.

$\underline{\phi} = [\underline{\phi}_1 \ \underline{\phi}_2 \ \cdots \ \underline{\phi}_r]$ contém os r autovetores, ou modos de vibração relacionados aos autovalores.

Os autovetores $\underline{\phi}$ formam uma base \underline{M} -ortonormal do subespaço r-dimensional dos operadores \underline{K} e \underline{M} , subespaço este denominado E_∞ . Deste modo, a iteração com r vetores linearmente independentes pode ser vista como uma iteração com um subespaço.

O Método de Iteração por Subespaço consiste,

basicamente, na combinação do Método de Iteração Inversa com a análise de Rayleigh-Ritz, podendo ser resumido nas seguintes etapas:

(a) São definidos q vetores de partida, ou vetores de iteração iniciais, linearmente independentes, onde $q > r$. Estes vetores de partida geram o subespaço E_1 , prosseguindo a iteração até E_1 convergir para E_∞ . O método visa, portanto, a convergência do subespaço, e não a convergência individual de cada vetor de iteração para seu correspondente autovetor. Os vetores de partida constituem as colunas da matriz \bar{X}_1 .

(b) Realiza-se uma iteração inversa simultânea:

$$\bar{K} \bar{X}_{k+1} = M \bar{X}_k \quad (\text{II.36})$$

passando-se do subespaço E_k para o subespaço E_{k+1} . Os vetores de \bar{X}_{k+1} formam a base de Ritz do subespaço E_{k+1} .

(c) A pesquisa da convergência do subespaço E_{k+1} é feita com o auxílio do método de Rayleigh-Ritz, projetando-se \bar{K} e M no subespaço E_{k+1} :

$$\bar{K}_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \bar{K} \bar{X}_{k+1} \quad (\text{II.37})$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T M \bar{X}_{k+1} \quad (\text{II.38})$$

Este procedimento é necessário para se manterem os valores absolutos dos elementos de \bar{X}_{k+1} dentro de limites razoáveis e para forçar a convergência dos vetores de iteração pa-

ra os correspondentes autovetores.

- (d) A seguir, resolve-se o problema de autovalor associado aos operadores projetados, utilizando-se o Método de Jacobi generalizado:

$$\bar{K}_{k+1} Q_{k+1} = \bar{M}_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1} \quad (\text{II.39})$$

onde Q_{k+1} é a matriz que contém as coordenadas de Ritz da melhor aproximação aos autovetores no subespaço E_{k+1} .

- (e) A melhor base no subespaço E_{k+1} , ou seja, a mais próxima dos autovetores é obtida por:

$$X_{k+1} = \bar{X}_{k+1} Q_{k+1} \quad (\text{II.40})$$

Repetindo-se o ciclo iterativo, a convergência será obtida no limite:

$$\Lambda_{k+1} \rightarrow \Lambda \text{ e } X_{k+1} \rightarrow \phi, \quad k \rightarrow \infty \quad (\text{II.41})$$

desde que os vetores em X_1 não sejam \bar{M} -ortogonais a algum dos autovetores $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$.

De acordo com o item (a), a escolha dos vetores de partida constitui-se no primeiro passo do Método de Iteração por Subespaço, sendo que a convergência depende do fato dos vetores formarem um subespaço de partida E_1 o mais próximo possível do E . Uma técnica eficiente, quando \bar{K} e \bar{M} são matrizes diagonais, é a que considera estes vetores como unitários, com o valor +1 correspondendo aos graus de liberdade onde a relação k_{ii}/m_{ii} seja a menor, k_{ii} e m_{ii} elementos da diagonal de \bar{K} e \bar{M} , respectivamente. Estes vetores são os autovetores correspondentes

aos menores autovalores, e a convergência é alcançada com uma iteração. De uma maneira geral, utiliza-se um algoritmo em que a primeira coluna de $\underline{M} \underline{X}_1$ é a diagonal de \underline{M} , garantindo-se que todos os graus de liberdade que possuam massa sejam excitados. As demais colunas de $\underline{M} \underline{X}_1$ são vetores unitários, cujo valor +1 corresponde às menores relações k_{ii}/m_{ii} . Este processo apresenta boa convergência, mas há casos em que outros procedimentos são mais eficazes. Nas diversas análises durante o projeto, a estrutura sofre pequenas alterações na massa, rigidez, etc..., podendo os autovetores obtidos de uma análise anterior, constituírem-se num conjunto de vetores de partida bem mais eficiente.

As referências (3), (4) e (5) abordam, detalhadamente, o Método de Iteração por Subespaço.

C A P Í T U L O I I I

ANÁLISE DINÂMICA DETERMINÍSTICA DE ESTRUTURAS

III.1 - INTRODUÇÃO

Serão abordados, neste capítulo, dois métodos para determinação da resposta de uma estrutura submetida a carregamento dinâmico determinístico: o Método de Superposição Modal com a Técnica de Correção dos Modos Superiores para a determinação da resposta permanente do domínio da frequência e o Método Direto para a determinação da resposta permanente de estruturas submetidas a cargas de alta frequência de excitação.

O modelo determinístico de análise é aplicado quando se deseja determinar a resposta de uma estrutura submetida a solicitações dinâmicas, cuja variação no tempo é totalmente conhecida. É o caso, por exemplo, das solicitações de equipamentos mecânicos, que podem atuar, inclusive, a um nível bem elevado de frequência de excitação. Este caso será analisado no item III.3, constituindo-se num caso particular do item III.2.3. Uma outra aplicação importante do modelo determinístico é a determinação da resposta de estruturas submetidas à ação do mar, como as estruturas offshore. Sabe-se que o mar é um fenômeno ambiental, com características aleatórias, onde a aplicação de um modelo aleatório de análise é mais conveniente. Pode-se, no entanto, aplicar uma análise determinística, tratando-se o mar como uma série de ondas unidirecionais discretas periódicas, ou estados

de mar, caracterizados pelos períodos e alturas de ondas, determinados através de estudos estatísticos (12,13). As ondas são desenvolvidas em série de Fourier, cujos termos são as parcelas de carga periódicas, harmônicas, sendo que a ação sob a estrutura pode ser estudada através da resposta permanente, que será desenvolvida no item III.2.

Existem diferentes métodos determinísticos de análise, visando a obtenção da solução da equação (II.16) que traduz o equilíbrio dinâmico de um sistema estrutural discretizado pelo Método dos Elementos Finitos (Capítulo II). Estes métodos podem ser resumidos em:

- (a) Integração direta do sistema de equações no domínio do tempo, utilizando-se coordenadas físicas.
- (b) Aplicação de uma transformação para coordenadas generalizadas (modais) das equações no domínio do tempo, resultando num sistema de equações desacopladas.
- (c) Solução permanente (steady-state) no domínio da frequência utilizando-se coordenadas físicas.
- (d) Solução permanente no domínio da frequência utilizando-se coordenadas generalizadas (modais).

A aplicação de cada um destes métodos depende do tipo de estrutura e do tipo de solicitação, buscando-se a técnica que permita a obtenção da solução o mais precisa possível, com o mínimo de esforço computacional.

Analizando-se cada um dos itens de (a) a (d), verifica-se que os métodos de integração direta no domínio do

tempo são os mais precisos e podem ser aplicados para qualquer tipo de carregamento e estrutura, com comportamento linear ou não-linear. No entanto, para estruturas com muitos graus de liberdade, a integração passo a passo exige um grande esforço computacional para se chegar à convergência da solução. Neste caso, o Método de Superposição Modal se apresenta como uma técnica viável, que requer um esforço computacional menor. Sendo a excitação periódica, a solução no domínio de frequência é ainda mais rápida, apesar de ser sua aplicação restrita aos casos em que o sistema de equações diferenciais (II.16) seja linear. Para os casos de não-linearidade, têm sido desenvolvidos estudos visando-se adequar a solução no domínio da frequência através de técnicas de linearização equivalente (15).

O presente trabalho visa apresentar um método de análise dinâmica de sistemas estruturais lineares, submetidos a carregamento periódico.

III.2 - RESPOSTA PERMANENTE (*Steady-State*) ATRAVÉS DO MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL

Neste item serão apresentados o Método de Superposição Modal, a técnica da correção estática dos modos superiores e a resposta permanente.

III.2.1 - Método de Superposição Modal

Como já foi visto no Capítulo II, o equilíbrio dinâmico de um sistema estrutural linear, discretizado pelo Método dos Elementos Finitos, resulta no seguinte sistema $n \times n$

de equações diferenciais de 2^a ordem (onde n é o número de graus de liberdade do sistema):

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{U}}(t) + \underline{K} \underline{U}(t) = \underline{F}(t) \quad (\text{II.16})$$

onde

\underline{M} é a matriz de massa

\underline{C} é a matriz de amortecimento

\underline{K} é a matriz de rigidez

$\underline{U}(t)$ é um vetor de deslocamentos variáveis no tempo

$\dot{\underline{U}}(t)$ é um vetor de velocidades variáveis no tempo

$\ddot{\underline{U}}(t)$ é um vetor de acelerações variáveis no tempo

$\underline{F}(t)$ contém as componentes de forças nodais variáveis no tempo

Este sistema de equações, em coordenadas físicas, pode ser resolvido por intermédio de um método que utilize uma transformação de coordenadas, resultando num conjunto de equações diferenciais independentes e desacopladas. Uma transformação de coordenadas, usualmente aplicada e eficiente, é a que utiliza os modos de vibração como coordenadas generalizadas:

$$\underline{U} = \underline{\phi} \underline{X} \quad (\text{III.1})$$

onde

\underline{X} é o vetor de coordenadas modais generalizadas, variáveis no tempo;

$\underline{\phi}$ é a matriz de transformação ou matriz modal.

A matriz $\underline{\phi}$ representa todos os modos de vibração da estrutura, contendo os n autovetores associados ao problema de autovalor:

$$\underline{K} \underline{\phi} - \underline{M} \underline{\phi} \underline{\Lambda} = \underline{0} \quad (\text{III.2})$$

onde

$$\underline{\phi} = [\underline{\phi}_1 \ \underline{\phi}_2 \ \cdots \ \underline{\phi}_n] \quad (\text{III.3})$$

e

$\underline{\Lambda}$ é a matriz diagonal que contém os quadrados das frequências naturais:

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

Este problema de autovalor foi resolvido no item II.3, onde se verificou que, se os autovetores forem normalizados em relação à matriz de massa, chega-se a:

$$\underline{\phi}^T \underline{K} \underline{\phi} = \underline{\Lambda} \quad (\text{III.5})$$

$$\underline{\phi}^T \underline{M} \underline{\phi} = \underline{I} \quad (\text{III.6})$$

$$\underline{\phi}^T \underline{C} \underline{\phi} = 2 \underline{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \underline{\xi} = \underline{0} \quad (\text{III.7})$$

onde

$\underline{\xi}$ é a matriz diagonal que contém as frações do amortecimento crítico correspondentes a cada modo:

$$\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 & & & \\ & \xi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_n \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Sendo possível se utilizar o amortecimento dito proporcional, a matriz de amortecimento, após ter sido pré e pós-multiplicada pela matriz modal, resulta na matriz diagonal apresentada em (III.7), ou seja:

$$\underline{\Theta} = \begin{bmatrix} 2 \omega_1 \xi_1 & & & \\ & 2 \omega_2 \xi_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2 \omega_n \xi_n \end{bmatrix} \quad (III.9)$$

Este fato é de grande importância no Método de Superposição Modal, para que sejam obtidas equações desacopladas.

Aplicando-se a transformação modal (III.1) em (II.16), obtém-se:

$$\underline{M} \underline{\phi} \ddot{\underline{X}} + \underline{C} \underline{\phi} \dot{\underline{X}} + \underline{K} \underline{\phi} \underline{X} = \underline{F}(t) \quad (III.10)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação (III.10) por $\underline{\phi}^T$ e utilizando-se as propriedades (III.5), (III.6) e (III.7), obtém-se o sistema de equações desacopladas:

$$\ddot{\underline{X}} + \underline{\Theta} \dot{\underline{X}} + \underline{\Lambda} \underline{X} = \underline{\phi}^T \underline{F}(t) \quad (III.11)$$

A utilização de todos os modos de vibração como coordenadas generalizadas, apesar de não introduzir aproximações nos resultados, acarreta um excessivo esforço computacional. Considera-se, portanto, na análise, apenas a fração dos modos de vibração associados às mais baixas frequências, supondo-se que estes modos permitam uma boa aproximação para a solução exata.

Desta forma, a matriz modal é dividida em duas sub-matrizes:

$$\underline{\phi} = [\underline{\phi}_r, \underline{\phi}_s] \quad (\text{III.12})$$

onde:

$\underline{\phi}_r$ contém os modos correspondentes às r mais baixas frequências;

$\underline{\phi}_s$ contém os n-r modos restantes.

Assim, o vetor de deslocamentos pode ser expresso como uma combinação linear dos modos de vibração através da relação:

$$\underline{U} = \underline{\phi} \underline{X} = [\underline{\phi}_r, \underline{\phi}_s] \begin{Bmatrix} \underline{X}_r \\ \underline{X}_s \end{Bmatrix} = \underline{U}_r + \underline{U}_s \quad (\text{III.13})$$

onde

$$\underline{U}_r = \underline{\phi}_r \underline{X}_r \quad (\text{III.14})$$

é o termo correspondente ao r primeiros modos e

$$\underline{U}_s = \underline{\phi}_s \underline{X}_s \quad (\text{III.15})$$

é a contribuição dos modos superiores de vibração, normalmente desprezada.

O sistema de equações (III.11) se reduz às seguintes r equações:

$$\ddot{\underline{X}}_r + \underline{\theta}_r \dot{\underline{X}}_r + \underline{\Lambda}_r \underline{X}_r = \underline{\phi}_r^T \underline{F}(t) \quad (\text{III.16})$$

o que corresponde a introduzir a seguinte aproximação:

$$\underline{U} \approx \underline{U}_r = \underline{\phi}_r \cdot \underline{X}_r = \sum_{j=1}^r \underline{\phi}_j X_j \quad (\text{III.17})$$

Supõe-se, portanto, que a resposta da estrutura possa ser representada pelos r primeiros modos de vibração, relacionados às mais baixas frequências de vibração, sendo $r \ll n$.

Nas estruturas em que o interesse principal focaliza-se na determinação de deslocamentos, velocidades, acelerações e forças de inércia, esta afirmação é válida, pois a convergência dos resultados é rápida, mesmo para poucos modos de vibração. Porém, no cálculo dos esforços com a utilização de um número reduzido de modos, poderão ser obtidos valores demasiadamente discrepantes dos reais, o que se torna particularmente prejudicial na análise da fadiga, onde as tensões devem ser avaliadas com um suficiente nível de precisão.

Verifica-se que estas imprecisões que surgem na utilização do Método de Superposição Clássico, são devidas às componentes de carga normais aos modos considerados na análise, ou seja, os modos de vibração empregados não são capazes de representar a totalidade do carregamento. Daí se concluir que a validade de se truncar as coordenadas modais depende do tipo de carregamento atuante. Aumentar o número de modos de vibração, de modo a se obterem melhores resultados, pode não se constituir numa boa estratégia de solução, como é verificado nos exemplos analisados no Capítulo VI, pois, em muitos casos, a convergência só é alcançada utilizando-se praticamente todos os modos de vibração.

Vários esforços para melhorar a solução são encontrados na literatura, adicionando-se à resposta dinâmica a resposta quasi-estática relacionada aos modos truncados. As cargas atuando numa estrutura amortecida são suportadas por uma so

ma das forças elásticas, forças de amortecimento e forças de inércia, e a contribuição de cada parcela depende da relação entre a frequência natural e frequência da carga aplicada. A resistência devida à inércia e amortecimento pode ser significativa apenas para os modos correspondentes às frequências mais baixas e desta forma a resistência relativa aos modos superiores pode ser estimada como um problema estático onde o vetor de cargas é a parcela do carregamento desprezado pela utilização de apenas uma fração dos modos naturais.

Uma técnica interessante foi introduzida por Maddox em 1974 (18), mais tarde discutida por Hansteen e Bell (19) e por Clough e Wilson (20). A idéia básica é a aplicação do Método de Superposição Modal utilizando poucos modos, mas introduzindo uma correção estática de modo a considerar a contribuição dos modos superiores, desprezada na análise dinâmica. Esta técnica foi adotada no presente trabalho.

III.2.2 - Correção Estática dos Modos Superiores

O vetor de cargas em coordenadas modais, definido na equação (III.11) pode ser expresso como:

$$\underline{R} = \underline{\phi}^T \underline{F}(t) = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_r^T \\ \underline{\phi}_s^T \end{bmatrix} \underline{F}(t) = \begin{bmatrix} \underline{R}_r \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

onde

$$\underline{R}_r = \underline{\phi}_r^T \underline{F} \quad (\text{III.19})$$

$$\underline{R}_s = \underline{\phi}_s^T \underline{F} \quad (\text{III.20})$$

Utilizando a equação (III.6), o vetor de cargas \underline{F} pode ser expresso em termos do vetor \underline{R} como:

$$(\underline{\phi}^T)^{-1} (\underline{\phi}^T \underline{M} \underline{\phi}) = (\underline{\phi}^T)^{-1} \underline{I} \quad (\text{III.21})$$

$$(\underline{\phi}^T)^{-1} \underline{R} = (\underline{\phi}^T)^{-1} (\underline{\phi}^T \underline{F}) \quad (\text{III.22})$$

Portanto:

$$\underline{M} \underline{\phi} = (\underline{\phi}^T)^{-1} \quad (\text{III.23})$$

$$(\underline{\phi}^T)^{-1} \underline{R} = \underline{F} \quad (\text{III.24})$$

Aplicando a equação (III.23) em (III.24) obtém-se:

$$\underline{F} = \underline{M} \underline{\phi} \underline{R} \quad (\text{III.25})$$

ou

$$\underline{F} = \underline{M} \begin{bmatrix} \underline{\phi}_r & \underline{\phi}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{R}_r \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \underline{F}_r + \underline{F}_s \quad (\text{III.26})$$

A parcela de carga desprezada, em termos de matriz $\underline{\phi}_r$, é:

$$\underline{F}_s = \underline{F} - \underline{F}_r = \underline{M} \underline{\phi}_r \underline{R}_r \quad (\text{III.27})$$

$$\underline{F}_s = \underline{F} - \underline{M} \underline{\phi}_r \underline{\phi}_r^T \underline{F} \quad (\text{III.28})$$

A correção dos deslocamentos é dada por:

$$\underline{U}_c = \underline{K}^{-1} \underline{F}_s \quad (\text{III.29})$$

Finalmente, determina-se o deslocamento por:

$$\underline{U} = \underline{U}_r + \underline{U}_c \quad (\text{III.30})$$

Deve-se observar que esta correção é obtida computando-se apenas os primeiros r autovetores, apresentando-se

a correção estática dos modos superiores como uma técnica atrativa no cálculo da resposta de estruturas através da superposição modal, pois não exige esforços computacionais adicionais significativos, permanecendo as vantagens da utilização do Método de Superposição Modal.

III.2.3 - Resposta Permanente (Steady-State)

Verifica-se que a resposta de um sistema estrutural linear, submetido a uma excitação harmônica de caráter permanente (steady-state), é do mesmo tipo da excitação, ou seja, um movimento harmônico de mesma frequência.

Voltando ao sistema de equações diferenciais do movimento:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{C} \dot{\underline{U}} + \underline{K} \underline{U} = \underline{F}(t) \quad (\text{II.16})$$

o vetor de cargas nodais $\underline{F}(t)$, para uma excitação harmônica, pode ser expresso pela parte real de:

$$\underline{F}(t) \stackrel{R}{=} \underline{F}_0 e^{i\omega t} \quad (\text{III.31})$$

onde

\underline{F}_0 é um vetor que contém as amplitudes complexas do tipo:

$$\underline{F}_0 \stackrel{R}{=} \underline{F} e^{i\theta} \stackrel{R}{=} F (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{III.32})$$

sendo F o módulo e θ a fase para cada grau de liberdade.

ω é a frequência de excitação do carregamento.

Portanto, quando a excitação for expressa por (III.31) a solução do regime permanente do sistema de equações (II.16) será dada pela parte real de:

$$\underline{U}(t) \stackrel{R}{=} \underline{U}_0 e^{i\omega t} \quad (\text{III.33})$$

onde

\underline{U}_0 é um vetor de amplitudes complexas do tipo:

$$\underline{U}_0 \stackrel{R}{=} U e^{i\theta} \stackrel{R}{=} U (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{III.34})$$

sendo U o módulo e θ a fase para cada grau de liberdade.

A solução homogênea da equação (II.16) se constitui na resposta transiente da estrutura.

Os vetores de velocidades e acelerações, $\dot{\underline{U}}(t)$ e $\ddot{\underline{U}}(t)$, respectivamente, são obtidos através de derivação no tempo:

$$\dot{\underline{U}}(t) \stackrel{R}{=} \frac{d\underline{U}(t)}{dt} \stackrel{R}{=} i\omega \underline{U}_0 e^{i\omega t} \stackrel{R}{=} i\omega \underline{U}(t) \quad (\text{III.35})$$

$$\ddot{\underline{U}}(t) \stackrel{R}{=} \frac{d^2 \underline{U}(t)}{dt^2} \stackrel{R}{=} -\omega^2 \underline{U}_0 e^{i\omega t} \stackrel{R}{=} -\omega^2 \underline{U}(t) \quad (\text{III.36})$$

Substituindo (III.33), (III.35) e (III.36) em (II.16), chega-se a:

$$(-\omega^2 \underline{M} + i\omega \underline{C} + \underline{K}) \underline{U}_0 = \underline{F}_0 \quad (\text{III.37})$$

ou ainda

$$\underline{Z}(\omega) \underline{U}_0 = \underline{F}_0 \quad (\text{III.38})$$

$$\underline{U}_0 = \underline{H}(\omega) \underline{F}_0 \quad (\text{III.39})$$

onde

$$\underline{H}(\omega) = \left[-\omega^2 \underline{M} + i\omega \underline{C} + \underline{K} \right]^{-1} \quad (\text{III.40})$$

é a resposta em frequência do sistema estrutural.

O sistema de equações (III.37) pode ser resolvido aplicando-se o Método de Superposição Modal, apresentado nos itens III.2.1 e III.2.2 .

Aplicando-se a transformação modal, o vetor de deslocamentos é expresso por:

$$\underline{U}(t) = \underline{\phi} \underline{X}(t) = \underline{\phi} \underline{X}_0 e^{i\omega t} \quad (\text{III.41})$$

onde

\underline{X}_0 é um vetor que contém as amplitudes complexas das coordenadas modais generalizadas do tipo:

$$X_0 = \sum_{R=1}^R X e^{i\Theta} \quad (\text{III.42})$$

sendo X o módulo e Θ a fase correspondente à cada modo.

Substituindo-se (III.41) em (III.37), obtém-se:

$$(-\omega^2 \underline{M} + i\omega \underline{C} + \underline{K}) \underline{\phi} \underline{X}_0 = \underline{F}_0 \quad (\text{III.43})$$

Pré-multiplicando por $\underline{\phi}^T$ e aplicando-se as propriedades (III.5), (III.6) e (III.7), obtém-se o sistema de equações desacopladas:

$$(-\omega^2 \underline{I} + i\omega \underline{\Theta} + \underline{\Lambda}) \underline{X}_0 = \underline{\phi}^T \underline{F}_0 = \underline{p} \quad (\text{III.44})$$

No Método de Superposição Modal são utilizados apenas os r primeiros modos de vibração, ficando o sistema (III.44) reduzido às equações:

$$(-\omega^2 + i\omega \Theta_j + \bar{\omega}_j^2) X_{0j} = \phi_j^T F_0 = p_j, \quad j=1,2,\dots,r \quad (\text{III.45})$$

onde

$\bar{\omega}_j$ é a frequência natural correspondente ao modo de vibra

ção ϕ_j .

A solução da equação (III.45) é obtida da seguinte forma:

$$X_{oj} \stackrel{R}{=} \frac{P_j}{(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2 + i\omega\theta_j)} , \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (\text{III.46})$$

Pode-se obter a parcela do vetor de deslocamentos, correspondente aos r primeiros modos, a partir da equação (III.41) através do somatório:

$$\underline{U}_r(t) \stackrel{R}{=} \sum_{j=1}^r \phi_j X_j(t) \stackrel{R}{=} \sum_{j=1}^r \phi_j X_{oj} e^{i\omega_j t} \quad (\text{III.47})$$

$$\underline{U}_r(t) \stackrel{R}{=} \underline{U}_{or} e^{i\omega t} \quad (\text{III.48})$$

$$\underline{U}_{or} = \sum_{j=1}^r \phi_j X_{oj} \quad (\text{III.49})$$

onde

X_{oj} é dado por (III.46)

A correção estática é obtida através da técnica desenvolvida no item III.2.2. Desta forma, resolvendo a equação (III.28) e substituindo-se o vetor de cargas nodais pela excitação harmônica dada em (III.31), resulta em:

$$\underline{F}_s(t) \stackrel{R}{=} (\underline{F}_o - \underline{M} \phi_r \phi_r^T \underline{F}_o) e^{i\omega t} \quad (\text{III.50})$$

A correção dos deslocamentos é dada por:

$$\underline{U}_c(t) \stackrel{R}{=} \underline{K}^{-1} (\underline{F}_o - \underline{M} \phi_r \phi_r^T \underline{F}_o) e^{i\omega t} \quad (\text{III.51})$$

Finalmente, chega-se à expressão para os deslocamentos:

$$\underline{U}(t) \stackrel{R}{=} \underline{U}_r(t) + \underline{U}_c(t) \quad (\text{III.52})$$

ou

$$\underline{U}(t) \stackrel{R}{=} \left[\sum_{j=1}^r \underline{\phi}_j X_{0j} + \underline{K}^{-1} (\underline{F}_0 - \underline{M} \underline{\phi}_r \underline{\phi}_r^T \underline{F}_0) \right] e^{i\omega t} \quad (\text{III.53})$$

onde

$$\underline{U}_0 = \sum_{j=1}^r \underline{\phi}_j X_{0j} + \underline{K}^{-1} (\underline{F}_0 - \underline{M} \underline{\phi}_r \underline{\phi}_r^T \underline{F}_0) \quad (\text{III.54})$$

Os vetores de velocidades e acelerações são obtidos a partir das equações (III.35) e (III.36):

$$\dot{\underline{U}}(t) \stackrel{R}{=} i\omega \underline{U}(t) \quad (\text{III.35})$$

$$\ddot{\underline{U}}(t) \stackrel{R}{=} -\omega^2 \underline{U}(t) \quad (\text{III.36})$$

onde

$\underline{U}(t)$ é dado pela equação (III.53)

Nos casos em que a estrutura está submetida a carregamentos resultantes de diferentes fontes de excitação, com diferentes frequências e fases, a análise deve ser feita para cada fonte em particular, obtendo-se a resposta da estrutura ao carregamento combinado através do somatório, no tempo, das respostas individuais de cada fonte, ou seja:

$$U(t) = \sum_{j=1}^n U_j (\cos(\omega_j t + \theta_j)), \quad (\text{III.55})$$

onde n é o número total de parcelas de carga ou fontes.

Este procedimento é o adotado ao se fazer a análise da ação das ondas do mar sobre estruturas offshore, através de métodos determinísticos.

O mar, após ser discretizado em estados de mar constituídos de ondas periódicas, tem estas ondas desenvolvidas em série de Fourier, onde o período fundamental é o período característico do estado de mar.

Desta forma, é feita uma análise para cada termo da série, que é tratado como uma fonte de excitação harmônica e permanente.

III.3 - RESPOSTA PERMANENTE PARA ALTAS FREQUÊNCIAS ATRAVÉS DO MÉTODO DIRETO

Um caso particular de resposta permanente, é aquele em que a frequência de excitação é tão elevada, que as forças de amortecimento da estrutura tornam-se desprezíveis, caracterizando-se na resposta o predomínio das forças de inércia.

Para esta análise será estudado, inicialmente, o caso de um sistema estrutural com um único grau de liberdade, amortecido, submetido a carregamento permanente.

Neste caso, o sistema de equações (II.16) se reduz a:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + ku = f(t) \quad (\text{III.56})$$

onde

m é a massa

c é o coeficiente de amortecimento

k é a rigidez da mola

u , \dot{u} , \ddot{u} são o deslocamento, velocidade e aceleração
variáveis no tempo

$f(t)$ é a força aplicada

O termo $m\ddot{u}$ é denominado força de inércia.

Considerando que o carregamento seja do tipo
periódico, ou seja:

$$f(t) \stackrel{R}{=} f_0 e^{i\omega t} = f_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (\text{III.57})$$

a resposta será do mesmo tipo:

$$u(t) \stackrel{R}{=} u_0 e^{i\omega t} \quad (\text{III.58})$$

onde

ω é a frequência de excitação

Substituindo (III.58) e (III.57) em (III.56),
obtem-se:

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k) u_0 = f_0 \quad (\text{III.59})$$

ou

$$u_0 \stackrel{R}{=} \frac{p_0}{(-\omega^2 m + i\omega c + k)} \quad (\text{III.60})$$

A equação (III.58) pode ser expressa da forma:

$$u(t) \stackrel{R}{=} \frac{p_0}{k} H(\omega) e^{i\omega t} \quad (\text{III.61})$$

que corresponde a se separar a resposta $u(t)$ numa parte estática,
representada por $\frac{p_0}{k}$, e numa parte dinâmica, representada por
 $H(\omega)e^{i\omega t}$, onde:

$$H(\omega) = \frac{k}{(k + i\omega c - \omega^2 m)} \quad (\text{III.62})$$

é a resposta em frequência do sistema.

A amplitude da resposta pode ser expressa como:

$$\frac{|u(t)|}{p_0} = \frac{|H(\omega)|}{k} \quad (\text{III.63})$$

onde, através de álgebra complexa, chega-se a:

$$|H(\omega)| = \frac{k}{\left| (k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2 \right|^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{III.64})$$

que é o fator de amplificação dinâmica.

Da análise de um sistema equivalente, não amortecido, sem cargas atuando, obtém-se:

$$m\ddot{u} + k\dot{u} = 0 \quad (\text{III.65})$$

ou

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} u = 0 \quad (\text{III.66})$$

onde

$$\frac{k}{m} = \bar{\omega}^2 \text{ é o quadrado da frequência natural do sistema} \quad (\text{III.67})$$

Considera-se que o amortecimento seja viscoso, do tipo

$$c = 2m \bar{\omega} \xi \quad (\text{III.68})$$

onde

ξ é a fração do amortecimento crítico

Aplicando (III.67) e (III.68) em (III.64),

resulta:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\{ [1 - (\omega/\bar{\omega})^2]^2 + [2\xi(\omega/\bar{\omega})]^2 \}^{1/2}} \quad (\text{III.69})$$

Esta equação é importante para a análise da resposta de um sistema a excitações periódicas, podendo-se tirar algumas conclusões importantes a partir do valor assumido por $|H(\omega)|$. Na figura III.1 é apresentado um gráfico da amplificação dinâmica, $|H(\omega)|$, em função das razões $\omega/\bar{\omega}$. Pode-se observar que, para $\omega/\bar{\omega} \ll 1$, $|H(\omega)| \simeq 1$, e a resposta do sistema é dada por:

$$|u(t)| = \frac{f_0}{k} \quad (\text{III.70})$$

ou seja, é uma resposta estática ou quase-estática.

Quando $\omega/\bar{\omega} = 1$, $|H(\omega)| = 1/2\xi$, sendo que para $\xi = 0$ ocorre o fenômeno de ressonância.

Para $\omega/\bar{\omega} \gg 1$, $|H(\omega)| \rightarrow 0$ e a resposta é dominada pela força de inércia, não havendo influência do amortecimento. Este é o caso das frequências altas de excitação.

Todo este desenvolvimento, visando sistemas com um grau de liberdade, pode ser estendido para sistemas com muitos graus de liberdade. Sendo ω muito alto, a relação $\omega/\bar{\omega}$ tende a se tornar cada vez maior, podendo-se verificar que a influência do amortecimento sobre a resposta é desprezível.

Com base nestas conclusões, pode-se escrever a equação (II.16) como sendo:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{K} \underline{U} = \underline{F}(t) \quad (\text{III.71})$$

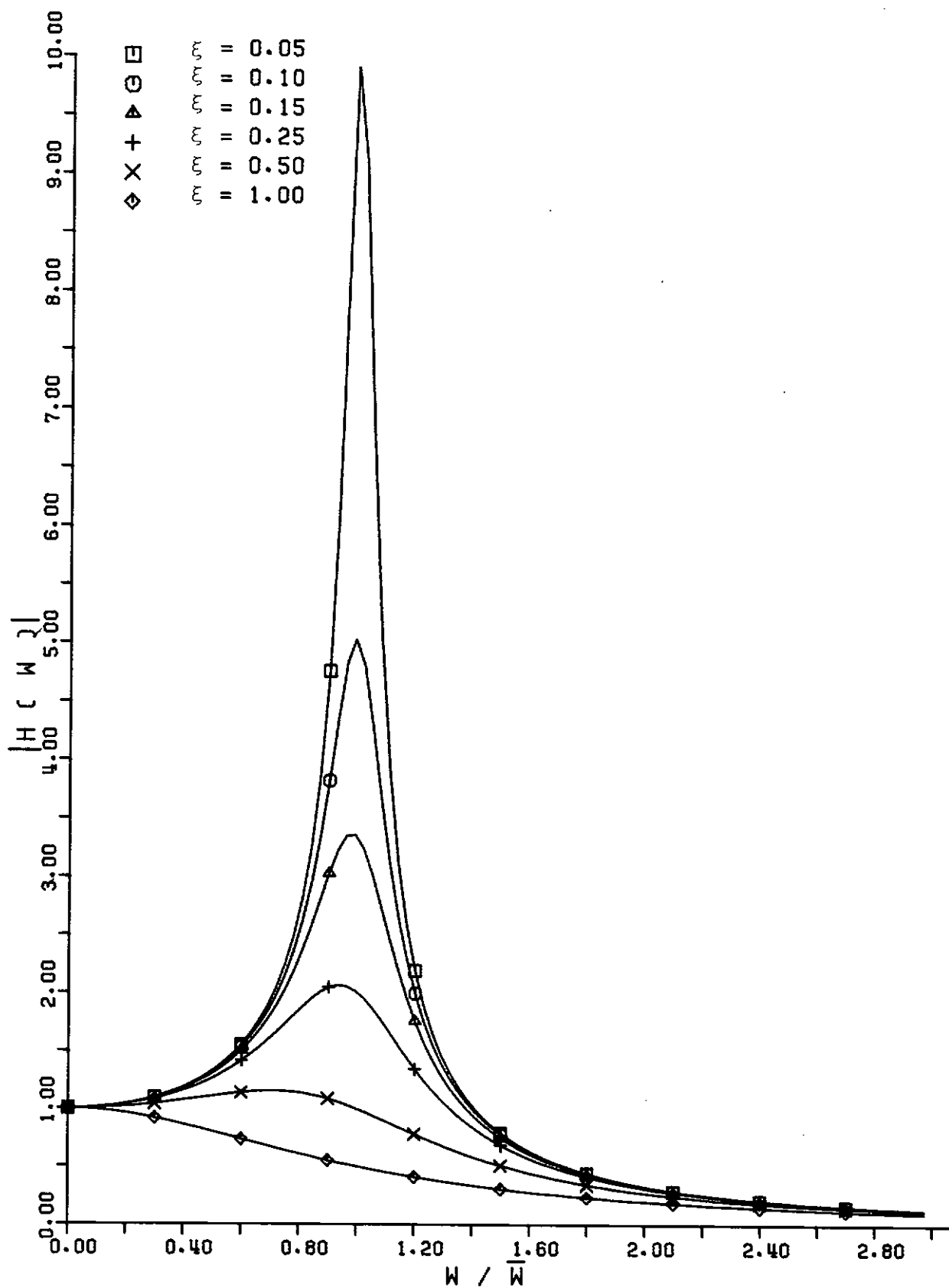


FIGURA III.1 - CURVAS DE AMPLIFICAÇÃO DINÂMICA

onde

$\underline{C} = 0$ pois sua influência é desprezível.

Sendo a excitação harmônica, de caráter permanente, do tipo:

$$\underline{F}(t) \stackrel{R}{=} \underline{F}_0 e^{i\omega t} \quad (\text{III.72})$$

procede-se ao mesmo desenvolvimento do item anterior, chegando-se à resposta:

$$\underline{U}(t) \stackrel{R}{=} \underline{U}_0 e^{i\omega t} \quad (\text{III.73})$$

Substituindo (III.73) em (III.71), obtém-se:

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{U}_0 = \underline{F}_0 \quad (\text{III.74})$$

Portanto, a solução é simplesmente obtida através da resolução da equação matricial:

$$\underline{\bar{K}} \underline{U}_0 = \underline{F}_0 \quad (\text{III.75})$$

onde

$$\underline{\bar{K}} = \underline{K} - \omega^2 \underline{M}, \text{ sendo } \omega \text{ a frequência de excitação.}$$

Para estruturas submetidas a vários carregamentos do tipo permanente com frequência alta, a resposta é determinada através do somatório das respostas para cada carregamento, à semelhança do item anterior.

C A P Í T U L O I V

ANÁLISE DINÂMICA ALEATÓRIA DE ESTRUTURAS

IV.1 - INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, apresentaram-se técnicas de solução aplicadas aos casos de sistemas estruturais submetidos a solicitações determinísticas. Através da análise aleatória, é possível avaliar a resposta de sistemas estruturais submetidos a solicitações de caráter aleatório, bem como considerar a incerteza no conhecimento das propriedades dinâmicas da estrutura. A análise aleatória se torna particularmente importante no tratamento de fenômenos ambientais, tais como a ação das rajadas de vento e ondas do mar. A resposta de estruturas submetidas a ação do mar, como as estruturas offshore, pode ser avaliada através de uma análise determinística, mas os resultados obtidos através de uma análise aleatória são bem mais realistas devido à possibilidade de uma representação mais adequada dos estados de mar, principalmente para grandes profundidades de lâmina d'água.

Neste capítulo serão apresentados, inicialmente, os conceitos estatísticos básicos necessários para o desenvolvimento do método de análise aleatória, apresentados no item IV.2. Utiliza-se, também, a transformada de Fourier como ferramenta para avaliar a densidade espectral. A relação entre a excitação e a resposta é avaliada no item IV.3.

Foram utilizadas, neste capítulo, as referên-

cias bibliográficas (1, 9, 12, 13 e 21 a 26).

IV.2 - CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE ALEATÓRIA

IV.2.1 - Processos Estacionários e Ergódicos

A excitação de caráter aleatório não permite a determinação de uma lei de variação no tempo, baseando-se a resposta de estrutura em previsões, não havendo, portanto, possibilidade de se garantir a ocorrência de valores pré-fixados da excitação para um certo instante. Para a análise de um fenômeno aleatório real, há necessidade de se considerar não apenas um único registro, mas a totalidade dos possíveis registros produzidos por idênticos experimentos sob as mesmas condições, cujo conjunto é denominado de processo aleatório. A figura IV.1 representa um processo aleatório, formado por um conjunto $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ de registros em função de uma variável independente t . Observa-se, na figura IV.1, que para um dado instante $t = t_1$, é possível se determinar os valores esperados (média, variância, etc...) sobre todo o conjunto $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$. A média dos valores $x_k(t)$, para $t = t_1$, pode ser escrita como:

$$E \left[x(t_1) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) \quad (\text{IV.1})$$

No caso geral, os valores calculados por (IV.1) para um tempo $t = t_1$, serão diferentes dos valores calculados para um outro tempo $t = t_2$. No caso particular em que os valores esperados de $x(t)$ forem independentes no tempo, o processo aleatório será dito estacionário. Um processo aleatório estacionário se

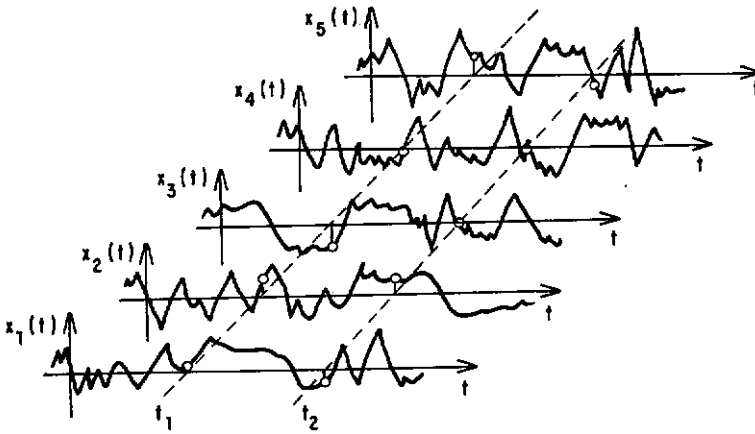


Figura IV-1 - Conjunto de registros no tempo de um processo aleatório.

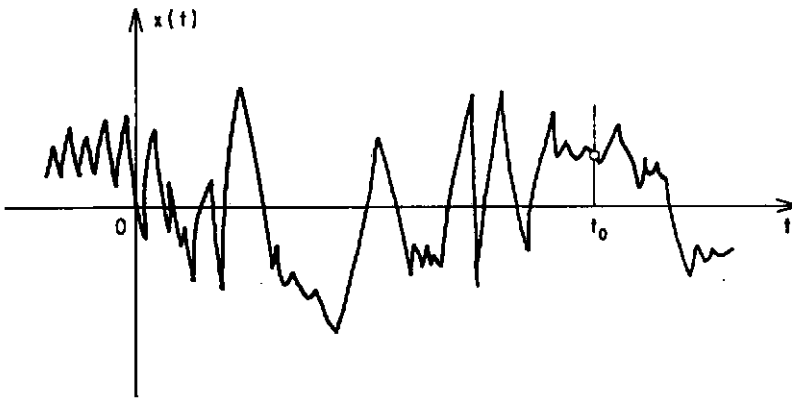


Figura IV-2 - História no tempo de um sistema submetido a vibrações aleatórias.

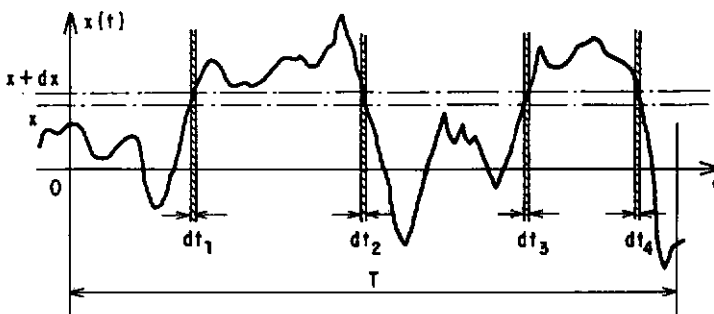


Figura IV-3 - História no tempo de um processo aleatório

r  denominado ergódico, se cada registro for estatisticamente equivalente aos demais, ou seja, qualquer um dos valores esperados, calculados sobre o conjunto dos registros, será igual ao calculado, ao longo do tempo, sobre um mesmo registro. Tudo o que será visto no restante deste capítulo   particularizado para este caso.

IV.2.2 - Função Densidade de Probabilidade de 1  Ordem

A função densidade de probabilidade de 1  ordem é definida, de um modo geral, por:

$$\text{Prob } (x \leq x(t_0) \leq x + dx) = p(x) dx \quad (\text{IV.2})$$

Supondo-se conhecido um conjunto de valores no tempo de $x(t)$, conforme a figura IV.2, que compõem a sua história no tempo, e assumindo-se que as características estatísticas de $x(t)$ não variem no tempo, pode-se, através deste registro, determinar a função densidade de probabilidade de $x(t)$. A figura IV.3 é a história no tempo, ou o registro, de um processo aleatório $x(t)$, onde as regiões hachuradas correspondem aos intervalos de tempo para os quais $x \leq x(t) \leq x + dx$. O tempo total, durante o intervalo T , em que $x(t)$ assume valores entre x e $x + dx$, é dado por $(dt_1 + dt_2 + dt_3 + dt_4)$. A função densidade de probabilidade é dada por:

$$p(x) dx = \frac{(dt_1 + dt_2 + dt_3 + \dots)}{T} = \frac{\sum dt}{T} \quad (\text{IV.3})$$

onde o intervalo de tempo T deve ser infinito.

Em resumo, para uma variável aleatória x contínua, e com intervalo de variação $-\infty \leq x \leq \infty$, a função densida-

de de probabilidade é definida pelas seguintes propriedades:

$$p(x) \geq 0 \quad (\text{IV.4})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \, dx = 1 \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{Pr}(x_a < x < x_b) = \int_{x_a}^{x_b} p(x) \, dx \quad (\text{IV.6})$$

Um caso particular, que ocorre com frequência, é a distribuição de probabilidade da figura IV.4, denominada distribuição normal ou Gaussiana, expressa por:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \, \sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \quad (\text{IV.7})$$

Os valores de m e σ serão definidos no próximo item.

IV.2.3 - Valores Esperados para uma Variável

O valor esperado de uma função $f(x)$ é definido por:

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, p(x) \, dx \quad (\text{IV.8})$$

onde

$p(x)$ é a função densidade de probabilidade.

Os valores esperados mais utilizados na análise da resposta a excitações aleatórias, são a média, o valor médio quadrático, a variância e o desvio padrão.

O valor médio, ou média, $E(x)$, de uma função que representa a história no tempo de um processo aleatório, no

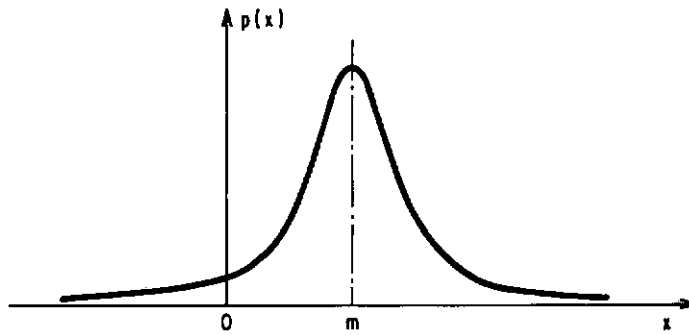


Figura IV-4 - Densidade de probabilidade de primeira ordem de um processo normal ou gaussiano.

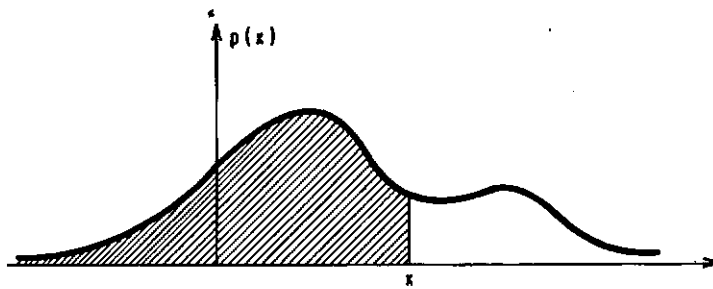


Figura IV-5 - A área hachurada fornece o valor da função de distribuição de probabilidade $P(x)$.

intervalo de tempo T , é definido de modo a que a equação abaixo seja verdadeira:

$$(E[x])T = \int_0^T x(t) dt \quad (\text{IV.9})$$

Portanto, a média é dada por:

$$\bar{x} = E[x] = \int_0^T x(t) \frac{dt}{T} \quad (\text{IV.10})$$

A integral da equação (IV.10), pode ser expressa como o somatório ao longo do tempo do produto $x(t)$ pela fração do tempo durante a qual $x(t)$ assume valores entre x e $x+dx$, ou seja:

$$E[x] = \sum_t x(t) \frac{dt}{T} \quad (\text{IV.11})$$

Através da equação (IV.3), tem-se que:

$$E[x] = \sum_x x p(x) dx \quad (\text{IV.12})$$

Aplicando-se (IV.11) e (IV.12) em (IV.10), resulta:

$$\bar{x} = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (\text{IV.13})$$

O valor médio quadrático de $x(t)$ é definido como o valor médio de x^2 , ou seja:

$$\bar{x}^2 = E[x^2] = \int_0^T x^2(t) \frac{dt}{T} \quad (\text{IV.14})$$

Aplicando-se o mesmo procedimento desenvolvido para a média, chega-se a:

$$\bar{x}^2 = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \quad (\text{IV.15})$$

O desvio-padrão de x , denotado por σ , e a variância, denotada por σ^2 , são definidos como:

$$\sigma^2 = E[(x - E[x])^2] \quad (\text{IV.16})$$

A equação (IV.16) pode ser desenvolvida, resultando em:

$$\sigma^2 = E[x^2 - 2xE[x] + (E[x])^2] = E[x^2] - (E[x])^2 \quad (\text{IV.17})$$

Portanto, a variância é dada por:

$$\sigma^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 \quad (\text{IV.18})$$

O desvio-padrão, σ , é definido pela raiz quadrada positiva da variância.

Voltando à distribuição de Gauss, definida em (IV.7), é possível determinar os valores de m e σ . Aplicando as equações (IV.13) e (IV.15) em (IV.7), obtém-se:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx \quad (\text{IV.19})$$

e

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx \quad (\text{IV.20})$$

Estas integrais podem ser calculadas através da mudança de variáveis:

$$y = (x - m) \quad (\text{IV.21})$$

Aplicando (IV.21) em (IV.19) e (IV.20), chega

-se a:

$$E[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (y + m) e^{-y^2/2\sigma^2} dy \quad (\text{IV.22})$$

$$E[x^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (y + m)^2 e^{-y^2/2\sigma^2} dy \quad (\text{IV.23})$$

Substituindo-se as integrais:

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \quad (\text{IV.24})$$

$$\int_0^{\infty} y e^{-y^2/2\sigma^2} dy = \sigma^2 \quad (\text{IV.25})$$

$$\int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2/2\sigma^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma^3 \quad (\text{IV.26})$$

Obtêm-se, finalmente:

$$E[x] = m \quad (\text{IV.27})$$

$$E[x^2] = \sigma^2 + m^2 \quad (\text{IV.28})$$

Portanto, m e σ são, respectivamente, a média e o desvio padrão da distribuição de Gauss.

IV.2.4 - Função de Distribuição de Probabilidade

A função de distribuição de probabilidade, $P(x)$, é definida como:

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad (\text{IV.29})$$

Esta função pode ser interpretada como sendo

a área hachurada sob a curva de densidade de probabilidade da figura IV.5, podendo assumir valores entre 0 e 1, representando a probabilidade de que um certo valor de uma variável aleatória seja menor que x .

Em particular, tem-se que:

$$\text{Prob } (-\infty \leq x \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = P(x = \infty) = 1 \quad (\text{IV.30})$$

Derivando-se a equação (IV.29) em relação a x , chega-se a:

$$\frac{d P(x)}{dx} = p(x) \quad (\text{IV.31})$$

Através da equação (IV.31) pode-se concluir que a função densidade de probabilidade é igual à declividade da curva da função de distribuição de probabilidade.

IV.2.5 - Função Densidade de Probabilidade de 2ª Ordem

Além da função densidade de probabilidade de primeira ordem, pode-se definir, também, a função densidade de probabilidade de 2ª ordem, $p(x, y)$, definida da mesma forma e extendida a duas variáveis aleatórias x e y . Neste caso, a probabilidade da variável randômica $x(t)$ assumir entre x e $x+dx$, e da variável $y(t)$ assumir valores entre y e $y+dy$ é dada por $p(x,y)dx dy$, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Prob } (x \leq x(t_0) \leq x + dx \text{ e } y \leq y(t_0) \leq y + dy) = \\ = p(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

A função densidade de probabilidade de 2^a ordem possui as seguintes propriedades:

$$p(x,y) \geq 0, \text{ para } -\infty < x < \infty \text{ e } -\infty < y < \infty \quad (\text{IV.33})$$

$$\begin{aligned} \text{Prob } (x_a \leq x(t_0) \leq x_b \text{ e } y_a \leq y(t_0) \leq y_b) &= \\ &= \int_{x_a}^{x_b} \int_{y_a}^{y_b} p(x,y) \, dx \, dy \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

$$\begin{aligned} \text{Prob } (-\infty \leq x(t_0) \leq \infty \text{ e } -\infty \leq y(t_0) \leq \infty) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \, dx \, dy = 1 \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

Na figura IV.6 está representada a função densidade de probabilidade de 2^a ordem, que se traduz por uma superfície que contém um volume unitário, de acordo com a equação (IV.35).

Para se determinar a probabilidade de $x(t_0)$ ocorrer entre x e $x+dx$, independentemente do valor de $y(t_0)$, aplica-se a equação (IV.34), chegando-se a:

$$\begin{aligned} \text{Prob } (x \leq x(t_0) \leq x + dx \text{ e } -\infty \leq y(t_0) \leq \infty) &= \\ &= dx \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \, dy \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

Esta probabilidade poderia ter sido obtida, utilizando-se a função densidade de probabilidade de 1^a ordem:

$$\text{Prob } (x \leq x(t_0) \leq x + dx) = p(x) \, dx \quad (\text{IV.37})$$

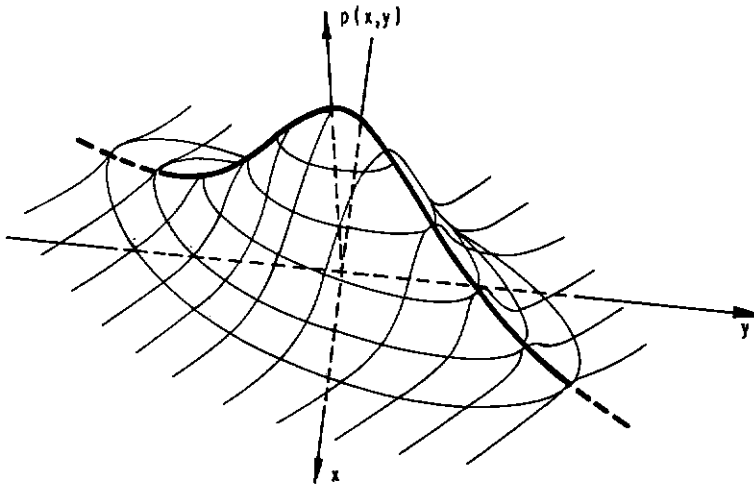


Figura IV-6 - Densidade de probabilidade de 2.^a ordem

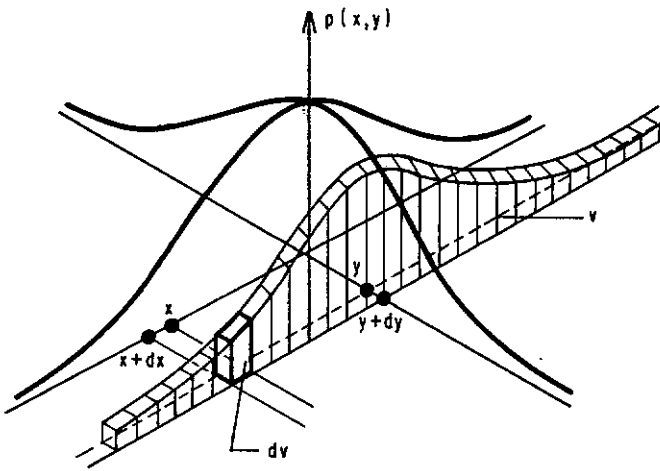


Figura IV-7 - Cálculo da função de densidade de probabilidade condicional.

As equações (IV.36) e (IV.37) expressam o mesmo resultado, o que implica em:

$$p(x) \, dx = dx \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \, dy \quad (\text{IV.38})$$

Portanto:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \, dy \quad (\text{IV.39})$$

Da mesma forma, obtêm-se para $p(y)$:

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \, dx \quad (\text{IV.40})$$

As equações (IV.39) e (IV.40) definem $p(x)$ e $p(y)$ que são as distribuições marginais de x e y , respectivamente.

Foi visto o caso de se especificar a densidade de probabilidade de $x(t_0)$ ocorrer entre x e $x+dx$, independente do valor de y . Será analisado, agora, o caso em que, estando y entre y e $y+dy$, deseja-se determinar a distribuição de x . Supondo-se duas funções aleatórias $x(t)$ e $y(t)$, obtêm-se os registros no tempo variando-se t_0 arbitrariamente, obtendo-se pares de valores de x e y . Deste conjunto são selecionados os valores de y situados entre y e $y+dy$. Deste novo conjunto de valores analisa-se, então, a distribuição de x , obtendo-se a função de densidade de probabilidade condicional para x em função de y , denotada por $p(x|y)$.

Na figura IV.7 está representada a função densidade de probabilidade de 2ª ordem, onde o volume dV representa a probabilidade de x ocorrer no intervalo $(x, x+dx)$ e y no intervalo

lo $(y, y+dy)$. O volume da região hachurada V , representa a probabilidade de $-\infty \leq x \leq \infty$ e y estar entre y e $y+dy$.

Portanto, a probabilidade condicional pode ser deduzida como:

$$p(x|y)dx = \frac{dV}{V} = \frac{p(x,y) dx dy}{dy \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx} \quad (\text{IV.41})$$

Substituindo-se (IV.40) em (IV.41), obtém-se:

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} \quad (\text{IV.42})$$

No caso da distribuição de probabilidade condicional de x ser independente de y , resulta:

$$p(x|y) = p(x) \quad (\text{IV.43})$$

Substituindo (IV.43) em (IV.42) obtém-se:

$$p(x,y) = p(x) p(y) \quad (\text{IV.44})$$

Esta é a condição de duas variáveis aleatórias, x e y serem estatisticamente independentes, ou seja, quando valores de x e y são tomados como amostras, os valores amostrados de x não são influenciados pelos correspondentes valores amostrados de y , e vice-versa.

Um caso particular da função densidade de probabilidade de 2ª ordem é a distribuição de Gauss de 2ª ordem, expressa por:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} e^A \quad (\text{IV.45})$$

onde

$$A = - \frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left\{ \frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} \right\} \quad (\text{IV.46})$$

m_x e m_y são os valores médios de x e y

σ_x e σ_y são as variâncias de x e y

ρ_{xy} é o coeficiente de correlação normalizado, deduzido nos próximos itens:

$$\rho_{xy} = \frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x\sigma_y} \quad (\text{IV.47})$$

IV.2.6 - Valor Esperado de uma Função de 2 Variáveis

O valor esperado de uma função de duas variáveis, $f(x,y)$, pode ser obtido por:

$$E[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) p(x,y) dx dy \quad (\text{IV.48})$$

IV.2.7 - Correlação e Covariância

Seja o conjunto de pares de valores de duas variáveis aleatórias x e y , onde cada par está representado por um ponto nos gráficos das figuras IV.8a e IV.8b. Na figura IV.8a os valores de x e y de cada par não apresentam relação alguma, enquanto que na figura IV.8b verifica-se uma relação definida.

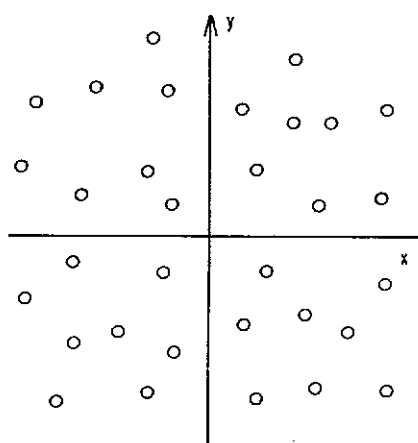
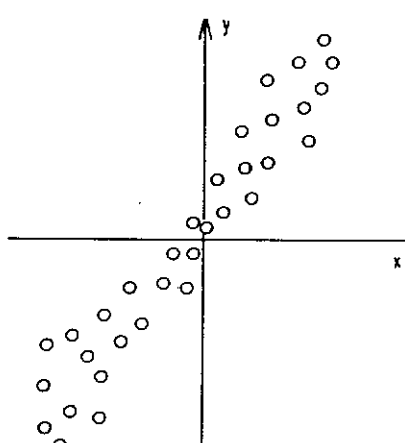
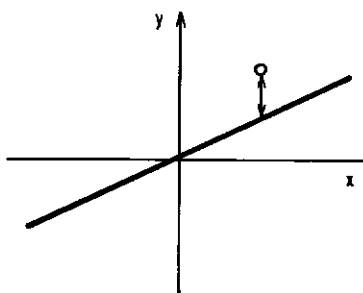
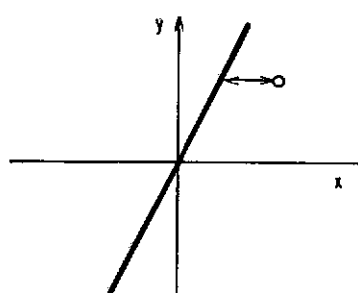
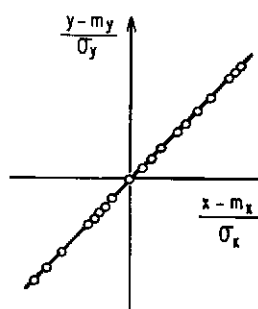
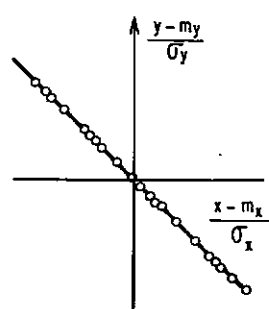
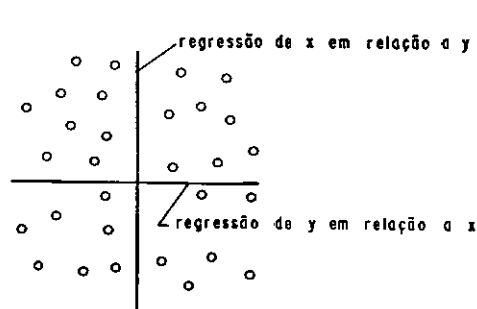
(a) x e y não apresentam correlação(b) x e y apresentam correlaçãoFigura IV-8 - Correlação entre duas variáveis aleatórias x e y .(a) Regressão de y em relação a x (b) Regressão de x em relação a y

Figura IV-9 - Retas de regressão para variáveis correlacionadas

(a) $\rho_{xy} = +1$ (b) $\rho_{xy} = -1$ (c) $\rho_{xy} = 0$ Figura IV-10 - Retas de regressão relativas a diferentes valores do coeficiente de correlação ρ_{xy} .

No caso da figura IV.8b, as variáveis mantêm uma correlação entre si, que pode ser aproximada por uma reta, através da minimização do quadrado do desvio dos valores reais de y dos valores aproximados pela reta, conforme a figura IV.9a. Ajustando-se os eixos de tal forma que a origem esteja no centro de gravidade dos pontos, a reta passará pela origem e terá a forma:

$$y = mx \quad (IV.49)$$

O desvio de um valor y qualquer do valor aproximado mx é dado por:

$$\Delta = y - mx \quad (IV.50)$$

A média do quadrado do desvio é:

$$\begin{aligned} E[\Delta^2] &= E[(y - mx)^2] = \\ &= E[y^2] + m^2 E[x^2] - 2m E[xy] \end{aligned} \quad (IV.51)$$

O mínimo se dará quando a derivada em relação a m for nula, ou seja:

$$2m E[x^2] - 2E[xy] = 0 \quad (IV.52)$$

Portanto:

$$m = \frac{E[xy]}{E[x^2]} \quad (IV.53)$$

Substituindo-se a equação (IV.53) em (IV.49), chega-se a:

$$y = \frac{E[xy]}{E[x^2]} x \quad (IV.54)$$

Da equação (IV.17), supondo-se que o valor médio seja nulo, tem-se que:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] \quad (\text{IV.55})$$

$$\text{e} \quad \sigma_y^2 = E[y^2] \quad (\text{IV.56})$$

Substituindo-se (IV.55) em (IV.54), e dividindo-se ambos os lados de (IV.54) por σ_y , obtêm-se:

$$\frac{y}{\sigma_y} = \left\{ \frac{E[xy]}{\sigma_x \sigma_y} \right\} \frac{x}{\sigma_x} \quad (\text{IV.57})$$

A equação (IV.57) é a regressão linear de y em relação a x . Da mesma forma, chega-se a regressão linear de x em relação a y :

$$\frac{x}{\sigma_x} = \left\{ \frac{E[xy]}{\sigma_x \sigma_y} \right\} \frac{y}{\sigma_y} \quad (\text{IV.58})$$

Caso as médias de x e y sejam diferentes de zero, as equações (IV.57) e (IV.58) transformam-se em:

$$\frac{y - m_y}{\sigma_y} = \left\{ \frac{E[(x - m_x)(y - m_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \right\} \frac{x - m_x}{\sigma_x} \quad (\text{IV.59})$$

e

$$\frac{x - m_x}{\sigma_x} = \left\{ \frac{E[(y - m_y)(x - m_x)]}{\sigma_x \sigma_y} \right\} \frac{y - m_y}{\sigma_y} \quad (\text{IV.60})$$

onde

m_x é o valor médio de x , ou \bar{x}

m_y é o valor médio de y , ou \bar{y}

O coeficiente de correlação, ou covariância normalizada, é dada pelo parâmetro:

$$\rho_{xy} = \frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \quad (\text{IV.61})$$

Este parâmetro representa o grau de dependência estatística entre duas variáveis aleatórias x e y . Para $\rho_{xy} = \pm 1$, as equações (IV.59) e (IV.60) representam uma linha reta e a correlação é perfeita. Para $\rho_{xy} = 0$ não há correlação, e as linhas de regressão são paralelas aos eixos x e y . Estes casos estão ilustrados na figura IV.10.

A covariância de x e y é definida pelo valor esperado do produto $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{cov}(x,y) &= E[(x-\bar{x})(y-\bar{y})] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})(y-\bar{y})p(x,y) dx dy = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} \end{aligned} \quad (\text{IV.62})$$

onde

$$\bar{x} = m_x$$

$$\bar{y} = m_y$$

Verifica-se que, quando x e y são estatisticamente independentes, $\text{cov}(x,y) = 0$.

IV.2.8 - Valores Esperados para n Variáveis Aleatórias

No caso de existirem várias variáveis aleatórias x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, com médias \bar{x}_i , variâncias σ_i^2 e covari

âncias $\text{cov}(x_i, x_j)$, a média e a variância de uma nova variável aleatória y , definida por:

$$y = \sum_i^n a_i x_i \quad (\text{IV.63})$$

onde a_i são parâmetros constantes, são dadas, respectivamente, por:

$$\bar{y} = E \left[\sum_i^n a_i x_i \right] = \sum_i^n a_i \bar{x}_i \quad (\text{IV.64})$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E \left[\left(\sum_i^n a_i x_i - \sum_i^n a_i \bar{x}_i \right)^2 \right] = \\ &= \sum_i^n \sum_j^n a_i a_j \text{cov}(x_i, x_j) \end{aligned} \quad (\text{IV.65})$$

Quando as variáveis aleatórias x_i forem estatisticamente independentes, ou seja, $\text{cov}(x_i, x_j) = 0$ para $i \neq j$, a equação (IV.65) se reduz a:

$$\sigma_y^2 = \sum_i^n a_i^2 \text{cov}(x_i, x_i) = \sum_i^n a_i^2 \sigma_i^2 \quad (\text{IV.66})$$

IV.2.9 - Função de Auto-Correlação e Correlação Cruzada

A função de auto-correlação representa uma medida da informação que o valor de uma variável aleatória em um dado instante t fornece sobre o valor da mesma variável em um outro instante $t + \tau$, conforme ilustrado na figura IV.11, sendo definida pela média do produto $x(t) x(t+\tau)$. Como o processo é estacionário, o valor de $E[x(t) x(t+\tau)]$ é independente do tempo t absoluto, dependendo, apenas, do intervalo τ . Tem-se que:

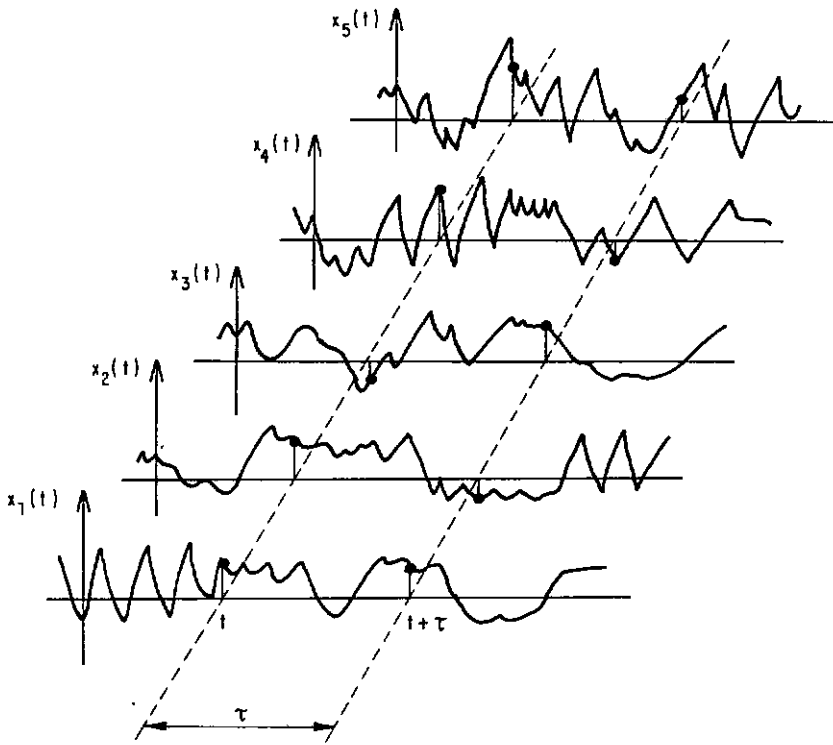


Figura IV-11- Cálculo da função de auto-correlação.

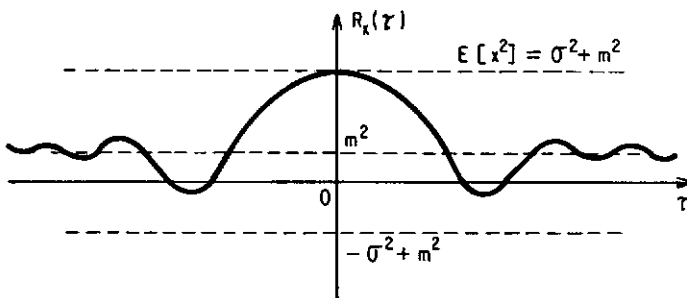


Figura IV-12- Propriedades da função de auto-correlação $R_x(\tau)$ de um processo aleatório estacionário

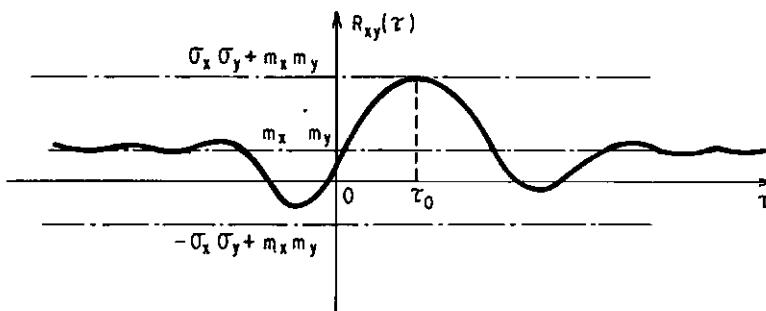


Figura IV-13 - Propriedades da função de correlação cruzada $R_{xy}(\tau)$ de dois processos estacionários $x(t)$ e $y(t)$.

$$R_x(\tau) = E[x(t) x(t+\tau)] \quad (\text{IV.67})$$

onde

$R_x(\tau)$ é a função de auto-correlação para $x(t)$

Sendo $x(t)$ estacionário, a média e o desvio-padrão independem do tempo, obtendo-se:

$$E[x(t)] = E[x(t+\tau)] = m \quad (\text{IV.68})$$

e

$$\sigma_x(t) = \sigma_x(t+\tau) = \sigma \quad (\text{IV.69})$$

Desta forma, o coeficiente de correlação entre $x(t)$ e $x(t+\tau)$, definido em (IV.61), é dado por:

$$\rho = \frac{E[\{x(t) - m\}\{x(t+\tau) - m\}]}{\sigma^2} = \frac{R_x(\tau) - m^2}{\sigma^2} \quad (\text{IV.70})$$

Da equação (IV.70), tem-se que:

$$R_x(\tau) = \sigma^2 \rho + m^2 \quad (\text{IV.71})$$

Como $-1 \leq \rho \leq 1$, chega-se a:

$$-\sigma^2 + m^2 \leq R_x(\tau) \leq \sigma^2 + m^2 \quad (\text{IV.72})$$

Quando o intervalo de tempo τ tende a zero, as variáveis $x(t)$ e $x(t+\tau)$ se aproximam numericamente. No limite, quando $\tau = 0$, as variáveis tornam-se completamente dependentes, obtendo-se:

$$R_x(\tau = 0) = E[x(t)^2] = E[x^2] \quad (\text{IV.73})$$

Para intervalos de tempo muito grandes, quando $\tau \rightarrow \infty$, a função de auto-correlação decai rapidamente com o

crescimento de τ , o que significa uma perda da dependência estatística entre os dois valores $x(\tau)$ e $x(t+\tau)$, não havendo correlação entre estes valores, e, portanto, $\rho \rightarrow 0$. Em vista disso, a partir de (IV.70), chega-se a:

$$R_x(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow m^2 \quad (\text{IV.74})$$

Já que para os processos estacionários $R_x(\tau)$ depende apenas do intervalo de separação τ , tem-se que:

$$R_x(\tau) = E[x(t) x(t+\tau)] = E[x(t) x(t-\tau)] = R_x(-\tau) \quad (\text{IV.75})$$

Conclui-se que $R_x(\tau)$ é uma função par de τ .

Todas estas observações, relativas à função de auto-correlação, estão ilustradas no gráfico da figura IV.12.

As funções de correlação cruzada entre duas variáveis aleatórias estacionárias diferentes, $x(t)$ e $y(t)$, são definidas como:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t) y(t+\tau)] \quad (\text{IV.76})$$

e

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t) x(t+\tau)] \quad (\text{IV.77})$$

Tratando-se de processos estacionários, chega-se a:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t-\tau) y(t)] = R_{yx}(-\tau) \quad (\text{IV.78})$$

e

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t-\tau) x(t)] = R_{xy}(-\tau) \quad (\text{IV.79})$$

De um modo geral, porém, $R_{xy}(\tau)$ e $R_{yx}(\tau)$ não são iguais e não são funções pares em τ .

A partir da equação (IV.61), as funções de correlação cruzada podem ser expressas em função da covariância normalizada ρ , resultando em:

$$R_{xy}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \rho_{xy}(\tau) + m_x m_y \quad (\text{IV.80})$$

e

$$R_{yx}(\tau) = \sigma_y \sigma_x \rho_{yx}(\tau) + m_y m_x \quad (\text{IV.81})$$

Como $-1 \leq \rho \leq 1$, os valores limites das funções de correlação cruzada são:

$$-\sigma_x \sigma_y + m_x m_y \leq R_{xy}(\tau) \leq \sigma_x \sigma_y + m_x m_y \quad (\text{IV.82})$$

Quando $\tau \rightarrow \infty$, não há correlação entre x e y , e portanto:

$$R_{xy}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow m_x m_y \quad (\text{IV.83})$$

$$R_{yx}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow m_y m_x \quad (\text{IV.84})$$

Estas propriedades estão ilustradas na figura IV.13.

IV.2.10 - Densidade Espectral

A densidade espectral terá seu desenvolvimento realizado neste trabalho, utilizando-se a transformada de Fourier.

Uma função $x(t)$, continuamente diferenciável por partes e periódica, pode ser sempre expressa através de uma série infinita de funções trigonométricas, ou série de Fourier. No entanto, o registro no tempo $x(t)$ de uma função de um proces-

so aleatório, não é periódica e portanto não pode ser representada por séries discretas de Fourier. Além disso, para um processo estacionário, $x(t)$ prossegue indefinidamente e a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (\text{IV.85})$$

que deve ser satisfeita para que seja possível a aplicação da integral de Fourier, não é verificada. Não é possível, portanto, avaliar a transformada de Fourier de $x(t)$ com o objetivo de se obter informações sobre a composição de frequências do processo aleatório. Esta dificuldade pode ser superada fazendo-se uma análise de Fourier não das funções de amostragem, ou registros, mas da função de auto-correlação $R_X(\tau)$. Isto é possível porque a função de auto-correlação fornece informações sobre as frequências presentes num processo aleatório indiretamente. Verifica-se que $R_X(\tau)$ atinge valores máximos para valores de τ para os quais $x(\tau)$ e $x(t+\tau)$ estão em fase e valores mínimos para valores de τ para os quais $x(t)$ e $x(\tau+t)$ estejam em anti-fase (21). Se o valor zero do processo aleatório $x(t)$ é ajustado de tal forma que o valor médio do processo $m = E[x]$ seja zero, supondo-se que $x(t)$ não tenha componentes periódicas, tem-se que:

$$R_X(\tau \rightarrow \infty) = 0 \quad (\text{IV.86})$$

Portanto, é satisfeita a condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau < \infty \quad (\text{IV.87})$$

Desta forma a transformada de Fourier de $R_X(\tau)$ e sua inversa são expressas por:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{IV.88})$$

$$e \quad R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{IV.89})$$

onde

$S_X(\omega)$ é a densidade espectral do processo x , função de ω .

Fazendo-se $\tau = 0$ e substituindo-se em (IV.89),

tem-se que:

$$R_X(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (\text{IV.90})$$

Substituindo (IV.90) em (IV.67) para $\tau = 0$,

chega-se a:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (\text{IV.91})$$

O valor médio quadrático de um processo aleatório estacionário x , é, portanto, dado pela área sob o gráfico de densidade espectral $S_X(\omega)$ contra ω , de acordo com a figura IV.14. A transformada de Fourier complexa pode ser expressa em termos da sua parte real e imaginária por:

$$S_X(\omega) = A(\omega) - iB(\omega) \quad (\text{IV.92})$$

onde:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (\text{IV.93})$$

e

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \sen \omega\tau d\tau \quad (\text{IV.94})$$

Sendo $R_X(\tau)$ uma função par de τ e $\sen \omega\tau$ uma função ímpar, o produto $R_X(\tau) \sen \omega\tau$ é uma função ímpar e a integral da equação (IV.94) é nula, o que resulta em:

$$S_X(\omega) = A(\omega) \quad (\text{IV.95})$$

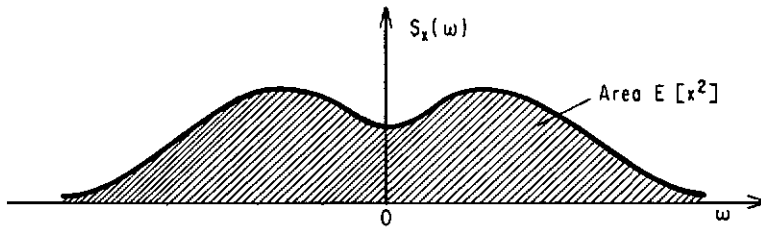


Figura IV-14 - A área sob a curva densidade espectral é igual a $E[x^2]$

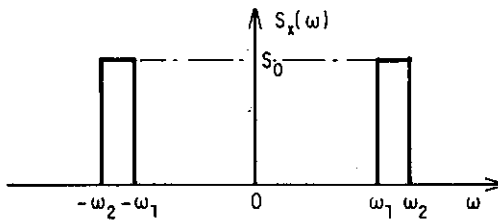


Figura IV-15 - Densidade espectral de um processo aleatório de banda estreita.

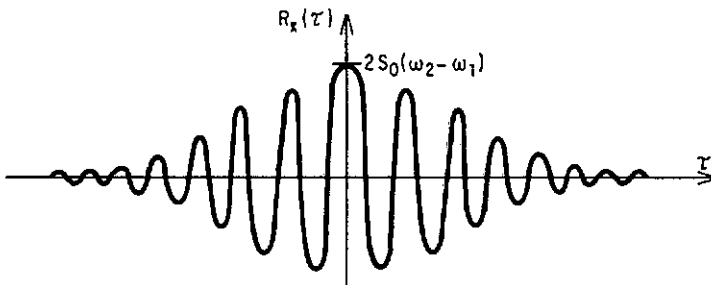


Figura IV-16 - Função de auto-correlação de um processo aleatório de banda estreita.

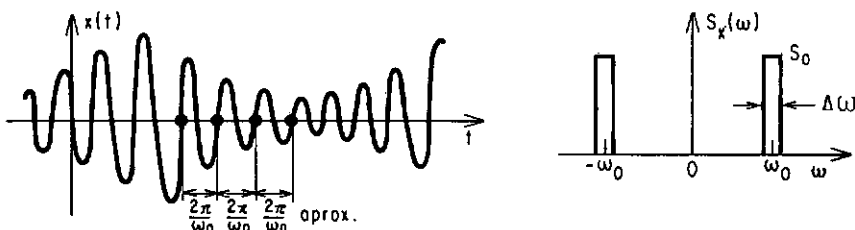


Figura IV-17 - História no tempo relativa a um registro de um processo de banda estreita.

que a partir de (IV.93), é uma função real par de ω . Pode ser demonstrado, também, que $S_x(\omega)$ nunca é negativo. Em resumo, a densidade espectral de um processo aleatório $x(t)$ é uma função de ω real, par e sempre positiva, conforme ilustrado na figura IV.14.

Um processo cuja densidade espectral tenha a forma mostrada na figura IV.15 é chamado de banda estreita, pois sua densidade espectral ocupa apenas uma faixa estreita de frequências. A função de auto-correlação possui a forma mostrada na figura IV.16, onde a frequência predominante no gráfico de $R_x(\tau)$ contra τ é o valor médio $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$. A correlação é máxima quando $\tau = 0$ e segue um gráfico da forma de cosseno de amplitude crescente quando a correlação dos valores que estão em fase de τ é gradualmente perdida com o aumento do tempo de separação τ . A história no tempo de um processo de banda estreita típica é ilustrado na figura IV.17.

Um processo de banda larga é aquele cuja densidade espectral varre uma larga banda de frequências e a história no tempo de um processo típico é apresentada na figura IV.18. No limite, quando a banda de frequências se estende de $\omega_1 = 0$ a $\omega_2 = \infty$, o espectro é denominado branco. De (IV.91), o valor médio quadrático de um processo de ruído branco é infinito, sendo o ruído branco um conceito teórico. Na prática, um espectro é chamado branco se é de banda larga, cuja largura se estende por todas as frequências de interesse.

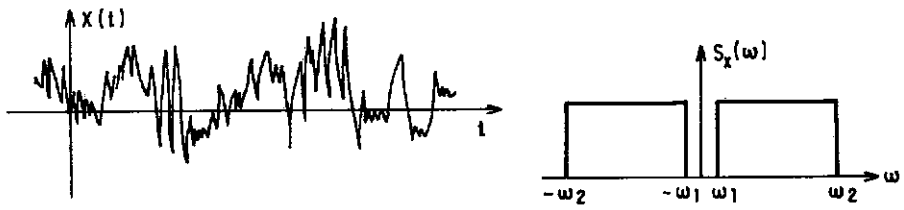


Figura IV-18 - História no tempo relativa a um registro de um processo de banda larga.

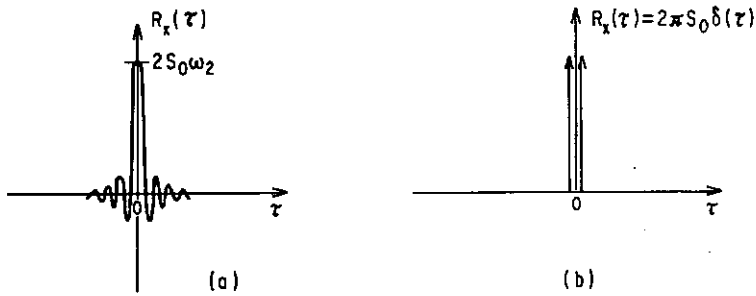


Figura IV-19 - Função de auto-correlação relativa a ruído branco.

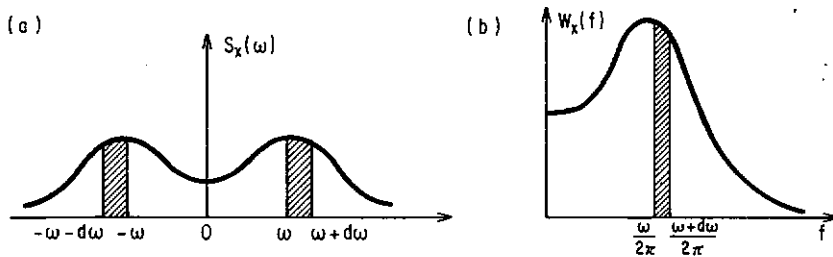


Figura IV-20 - Relação entre formas alternativas de se expressar a densidade espectral.

Para a determinação da função de auto-correlação e da densidade espectral correspondentes ao ruído branco, será considerado o exemplo representado na figura IV.15, que corresponde a um processo aleatório de banda estreita.

O valor médio quadrático pode ser obtido a partir da equação (IV.91), resultando em:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega = 2 S_O(\omega_2 - \omega_1) \quad (\text{IV.96})$$

A função de auto-correlação pode ser obtida a partir da equação (IV.89), o que resulta em:

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{IV.97})$$

Como $S_X(\omega)$ é uma função par de ω , obtém-se:

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_O \cos \omega\tau d\omega = \\ &= \frac{4 S_O}{\tau} \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \tau \quad \text{sen} \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) \tau \end{aligned} \quad (\text{IV.98})$$

A equação (IV.98) está representada na figura (IV.16).

Analisando-se, agora, o caso do ruído branco, quando a frequência mais baixa ω_1 é igual a zero, a função de auto correlação é expressa por:

$$R_X(\tau) = \frac{4 S_O}{\tau} \cos \frac{\omega_2 \tau}{2} \text{sen} \frac{\omega_2 \tau}{2} = 2 S_O \frac{\text{sen} \omega_2 \tau}{\tau} \quad (\text{IV.99})$$

A equação (IV.99) está representada na figura IV.19a.

Quando $\omega_2 \rightarrow \infty$, os ciclos adjacentes ao pico em $\tau = 0$ aproximam-se até se cancelarem, resultando numa linha vertical de altura infinita, comprimento zero e área finita, de magnitude $2\pi S_0$, de acordo com a figura IV.19b. Este comportamento pode ser descrito, matematicamente, utilizando-se a função delta de Dirac, expressa por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad (\text{IV.100})$$

De um modo geral, $\delta(\tau-T)$ é zero em todos os pontos exceto em $\tau = T$, e para uma função $f(\tau)$ arbitrária, contínua em τ , é válida a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-T) f(\tau) d\tau = f(\tau=T) \quad (\text{IV.101})$$

Aplicando-se (IV.100), a função de auto-correlação para um processo aleatório estacionário, do tipo ruído branco, cuja densidade espectral é S_0 , é expressa por:

$$R_x(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad (\text{IV.102})$$

Conhecendo-se a densidade espectral $S_x(\omega)$ de um processo aleatório estacionário $x(t)$, é possível calcular seu valor médio quadrático através da equação (IV.91), e também a densidade espectral dos processos obtidos através de diferenciação de x , como por exemplo a velocidade $\dot{x} = dx/dt$ e a aceleração $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, se x for o deslocamento.

A função de auto-correlação para um conjunto de registros de um processo aleatório é dada por:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x_r(t) x_r(t+\tau) \quad (\text{IV.103})$$

$\lim_{N \rightarrow \infty}$

Diferenciando-se $R_X(\tau)$ em relação a τ , e portanto cada termo do somatório em (IV.103), obtém-se:

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ x_r(t) x_r(t+\tau) \right\} = x_r(t) \frac{d}{d\tau} x_r(t+\tau) = x_r(t) \dot{x}_r(t+\tau) \quad (\text{IV.104})$$

Chega-se, portanto, a:

$$\frac{d}{d\tau} (R_X(\tau)) = E \left[x(t) \dot{x}(t+\tau) \right] \quad (\text{IV.105})$$

Para processos estacionários, o valor esperado independe do tempo t , ou seja:

$$E \left[x(t) \dot{x}(t+\tau) \right] = E \left[x(t-\tau) \dot{x}(t) \right] \quad (\text{IV.106})$$

resultando em:

$$\frac{d}{d\tau} (R_X(\tau)) = E \left[x(t-\tau) \dot{x}(t) \right] \quad (\text{IV.107})$$

Diferenciando-se (IV.107) em relação a τ , vem que:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} (R_X(\tau)) = -E \left[\dot{x}(t-\tau) \dot{x}(t) \right] \quad (\text{IV.108})$$

ou então:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} (R_X(\tau)) = -R_{\dot{X}}(\tau) \quad (\text{IV.109})$$

Através da transformada de Fourier, tem-se que:

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{IV.89})$$

Derivando-se a integral anterior em relação a τ , obtém-se:

$$\frac{d}{d\tau} (R_X(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{IV.110})$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} (R_X(\tau)) = - \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{IV.111})$$

Combinando-se as equações (IV.109) e (IV.111) conclui-se que a função de auto-correlação relativa à derivada do processo é expressa por:

$$R_{\dot{X}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{IV.112})$$

$R_{\dot{X}}(\tau)$ pode ser expressa como a transformada inversa da densidade espectral $S_{\dot{X}}(\omega)$ e, de acordo com (IV.89), tem-se que:

$$R_{\dot{X}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{X}}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{IV.113})$$

Comparando-se as equações (IV.112) e (IV.113) conclui-se que:

$$S_{\dot{X}}(\omega) = \omega^2 S_X(\omega) \quad (\text{IV.114})$$

ou seja, a densidade espectral da derivada do processo é a densidade espectral do processo original multiplicada por ω^2 .

Os valores médios quadráticos da velocidade e da aceleração, $E[\dot{X}^2]$ e $E[\ddot{X}^2]$, são obtidos por:

$$E[\dot{X}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{X}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_X(\omega) d\omega \quad (\text{IV.115})$$

$$E[\ddot{X}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{X}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_X(\omega) d\omega \quad (\text{IV.116})$$

Em resumo, a densidade espectral de um processo aleatório é definida como a transformada de Fourier de sua função de auto-correlação.

A densidade espectral cruzada de um par de processos aleatórios, é definida como a transformada de Fourier da função de correlação cruzada correspondente dos dois processos. Sendo $R_{xy}(\tau)$ e $R_{yx}(\tau)$ duas funções de correlação cruzada, tem-se que:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{IV.117})$$

e

$$S_{yx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{IV.118})$$

As inversas das transformadas são dadas por:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{IV.119})$$

e

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{IV.120})$$

Para que as integrais existam, de acordo com a teoria clássica da transformada de Fourier, é necessário satisfazer a condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{xy}(\tau)| d\tau < \infty \quad (\text{IV.121})$$

ou seja, $x(t)$ e $y(t+\tau)$ não devem se correlacionar quando $\tau \rightarrow \infty$. Utilizando-se as equações (IV.83) e (IV.84), conclui-se que m_x ou m_y deve ser nulo.

As funções de correlação cruzadas estão relacionadas através de (IV.78) e (IV.79), donde se conclui que os

dois espectros cruzados estão também relacionados.

Fazendo-se:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad (\text{IV.122})$$

e substituindo-se na equação (IV.117), tem-se que:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{IV.123})$$

Fazendo-se $\tau' = -\tau$, obtém-se:

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\tau'=-\infty}^{\tau'=\infty} R_{yx}(\tau') e^{i\omega\tau'} (-d\tau') = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau') e^{i\omega\tau'} d\tau' \end{aligned} \quad (\text{IV.124})$$

que é igual à expressão (IV.118) a menos do sinal de $i\omega$ que foi trocado. Através da transformada de Fourier, tem-se que:

$$S_{xy}(\omega) = A(\omega) - iB(\omega) \quad (\text{IV.125})$$

e

$$S_{yx}(\omega) = C(\omega) - iD(\omega) \quad (\text{IV.126})$$

onde $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$ e $D(\omega)$ são funções reais de ω .

Comparando (IV.124) e (IV.118), conclui-se que:

$$C(\omega) = A(\omega) \quad (\text{IV.127})$$

e

$$D(\omega) = -B(\omega) \quad (\text{IV.128})$$

Portanto, $S_{xy}(\omega)$ e $S_{yx}(\omega)$ são iguais, havendo diferença de sinais nas suas partes imaginárias, ou seja, $S_{yx}(\omega)$ é o conjugado complexo de $S_{xy}(\omega)$:

$$S_{yx}(\omega) = S_{xy}^*(\omega) \quad (\text{IV.129})$$

e

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}^*(\omega) \quad (\text{IV.130})$$

UNIDADES DA DENSIDADE ESPECTRAL

A unidade da densidade espectral de potência é dada por:

$$\frac{\text{unidade de } x^2}{\text{unidade de frequência angular}}$$

A unidade da densidade espectral cruzada é representada por:

$$\frac{\text{unidade de } x.y}{\text{unidade de frequência angular}}$$

Estas unidades dependem do intervalo de frequência considerado, ou seja, se a frequência varia de $-\infty$ a $+\infty$ ou de 0 a ∞ , e dependem também da unidade adotada para a frequência, seja Hertz ou rad/s.

De acordo com o desenvolvimento anterior, tem-se, para o valor médio quadrático:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (\text{IV.91})$$

Na prática, considera-se que a frequência esteja em Hertz, e trabalha-se apenas com a parte da densidade espectral relativa às frequências positivas. Desta forma, a equação (IV.91) se traduziria por:

$$E[x^2] = \int_0^{\infty} W_X(f) df \quad (\text{IV.131})$$

A figura IV.20 representa as duas formas de se representar a densidade espectral, e verifica-se que, a um intervalo de frequências ω a $\omega+d\omega$ na figura IV.20a, corresponde um intervalo $\omega/2\pi$ a $(\omega+d\omega)/2\pi$ na figura IV.20b. As áreas hachuradas representam contribuições iguais para o valor médio quadrático nesses intervalos de frequência, e portanto devem ser as mesmas, ou seja:

$$2S_X(\omega)d\omega = W_X\left(f = \frac{\omega}{2\pi}\right) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\text{IV.132})$$

Tem-se que:

$$W_X\left(f = \frac{\omega}{2\pi}\right) = 4\pi S_X(\omega) \quad (\text{IV.133})$$

ou

$$W_X(f) = 4\pi S_X(\omega = 2\pi f) \quad (\text{IV.134})$$

IV.3 - RELAÇÃO ENTRE EXCITAÇÃO E RESPOSTA

IV.3.1 - Relação entre Excitação e Resposta para Sistemas Lineares

No capítulo III, analisou-se o caso de um sistema estrutural linear, submetido a uma excitação periódica harmônica, $\underline{F}(t)$, cuja resposta $\underline{U}(t)$ foi obtida determinando-se a resposta em frequência do sistema, $\underline{H}(\omega)$. Sendo $\underline{F}(t)$ periódica, poderá ser representada por uma soma de funções harmônicas através da série de Fourier. A resposta do sistema a cada função harmônica é obtida através da equação (III.39), e o conjunto de respostas se constitui numa série de Fourier, que representa $\underline{U}(t)$. Se $\underline{F}(t)$ não

for periódica, mas possuir transformada de Fourier, a resposta poderá ser calculada de forma análoga.

As características dinâmicas de um sistema estrutural podem ser obtidas através de dois métodos. Um deles é a determinação de $H(\omega)$ para todas as frequências, e o outro é a avaliação da resposta transiente, obtida através da aplicação de um carregamento de curta duração (impulso), até que a estrutura atinja a posição de equilíbrio estático. Pode-se determinar a relação entre estes dois métodos, utilizando-se para isto a transformada de Fourier, que permite representar uma função não periódica no tempo a partir de seu espectro de frequências. A análise será desenvolvida para sistemas inicialmente em repouso e que tendem novamente ao repouso, satisfazendo-se a condição seguinte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (\text{IV.135})$$

É possível, portanto, aplicarem-se as transformadas de Fourier da sollicitação representada pelo impulso $x(t) = \delta(t)$ e da resposta $x(t) = h(t)$, obtendo-se:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{IV.136})$$

e

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{IV.137})$$

Desenvolvendo-se a equação (IV.136), chega-se

a:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cos \omega t dt - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \sin \omega t dt \quad (\text{IV.138})$$

Através das propriedades da função delta, conclui-se que a primeira integral da equação (IV.138) possui valor unitário e a segunda integral é nula, o que resulta em:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{IV.139})$$

Como já foi visto no capítulo III, uma excitação permanente de frequência ω produz uma resposta permanente de mesma frequência. Portanto, para uma excitação não periódica, é razoável esperar que, para a parcela de solicitação $X(\omega) d\omega$ situada no intervalo $\omega + d\omega$, a resposta $Y(\omega)$ estará no mesmo intervalo de frequências, ou seja, para uma solicitação do tipo:

$$x(t) = X(\omega) d\omega e^{i\omega t} \quad (\text{IV.140})$$

a resposta será do tipo

$$y(t) = Y(\omega) d\omega e^{i\omega t} \quad (\text{IV.141})$$

A equação (IV.141) pode ser expressa como:

$$y(t) = H(\omega) X(\omega) d\omega e^{i\omega t} \quad (\text{IV.142})$$

onde

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) \quad (\text{IV.143})$$

A equação (IV.143) fornece uma importante relação entre as transformadas de Fourier da solicitação e da resposta, e a resposta em frequência $H(\omega)$.

Substituindo-se (IV.137) e (IV.139) em (IV.143) tem-se que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt = H(\omega) \frac{1}{2\pi} \quad (\text{IV.144})$$

Portanto:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{IV.145})$$

A resposta em frequência, $H(\omega)$, é a transformada de Fourier da resposta para uma solicitação do tipo impulso, $h(t)$. Este resultado pode ser utilizado para a determinação da resposta de um sistema estrutural a uma solicitação arbitrária.

Utilizando-se a transformada inversa de Fourier de (IV.143), chega-se a:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right\} e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{IV.146})$$

Esta equação é a solução formal da resposta $y(t)$.

Devido à dificuldade de se avaliar o valor da integral da equação (IV.146), utiliza-se a resposta a um impulso como alternativa de solução. Para isto, supõe-se que uma excitação arbitrária $x(t)$ seja constituída de uma série contínua de pequenos impulsos. O impulso correspondente à excitação $x(t)$ entre os limites de tempo τ e $\tau + d\tau$, de acordo com a figura IV.21, tem magnitude $x(\tau)d\tau$, que corresponde à área hachurada. A resposta a este impulso é a fração da resposta a um impulso unitário em $t=\tau$, $h(t-\tau)$, fração dada por:

$$\frac{x(\tau) d\tau}{1} \quad (\text{IV.147})$$

A área hachurada da figura corresponde a uma certa parcela de contribuição para a resposta, dada por:

$$h(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (\text{IV.148})$$

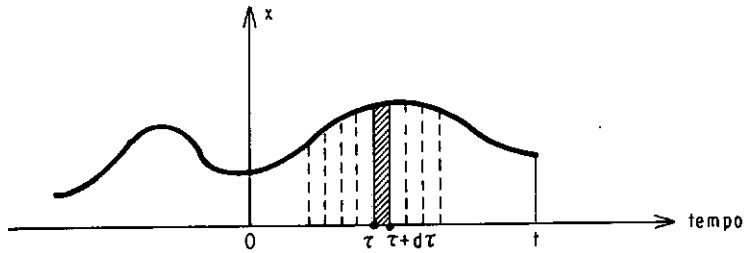


Figura IV-21 - Composição de uma solicitação $x(t)$ numa série de impulsos.

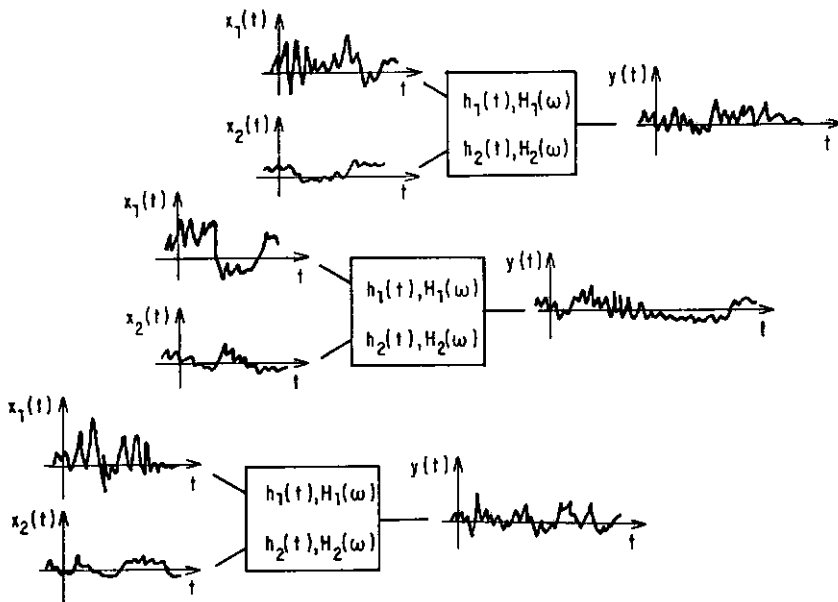


Figura IV-22 - Conjunto de registros para um sistema linear submetido à excitação aleatória.

Aplicando-se o princípio de superposição para sistemas lineares, obtém-se a resposta total $y(t)$ no tempo t somando-se todos os impulsos anteriores a t , que constituem a história no tempo de $x(t)$, ou seja:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (\text{IV.149})$$

A equação (IV.149) é outra expressão para a resposta $y(t)$ no tempo t , constituindo-se de uma integral de convolução. A resposta do sistema, $h(t)$, a um impulso, sofre um decaimento até o equilíbrio estático, de modo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (\text{IV.135})$$

Desta forma, a equação (IV.149) pode ser aplicada para qualquer solicitação cuja magnitude $|x(t)|$ está limitada a um certo valor. Observa-se que não é necessário que $x(t)$ satisfaça (IV.135), a condição necessária para a aplicação da transformada de Fourier clássica.

A equação (IV.149) pode ser apresentada sob outras formas, alterando-se os limites de integração, obtendo-se as seguintes alternativas:

- (a) Sendo $h(t-\tau)$ a resposta a um impulso unitário em $(t-\tau) = 0$, ou seja, $t = \tau$, para $(t-\tau) < 0$ não há resposta já que não há aplicação de impulso, e para $\tau > t$, $h(t-\tau) = 0$. O limite superior da integral em (IV.149) pode ser estendido de $\tau = t$ a $\tau = \infty$ sem alterar o resultado, já que $h(t-\tau)$ é zero neste intervalo. Tem-se, portanto:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau \quad (\text{IV.150})$$

(b) Supondo-se a seguinte mudança de variáveis:

$$\theta = t - \tau \quad (\text{IV.151})$$

os limites de integração passam a ser $\theta = \infty$ a $\theta = 0$, e $d\tau = -d\theta$, ou seja:

$$y(t) = \int_{\infty}^0 h(\theta) x(t-\theta) (-d\theta) \quad (\text{IV.152})$$

Esta equação pode também ser expressa como:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\theta) x(t-\theta) d\theta \quad (\text{IV.153})$$

(c) A última alternativa é obtida fazendo-se $\theta = (t-\tau)$ em (IV.150), ou então verificando-se que $h(\theta) = 0$ para $\theta < 0$. Tem-se que:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) x(t-\theta) d\theta \quad (\text{IV.154})$$

IV.3.2 - Resposta a Excitações Aleatórias

Neste item será avaliada de que maneira as características de um processo $y(t)$, que representa a resposta de um sistema linear a duas solicitações aleatórias representadas por $x_1(t)$ e $x_2(t)$, dependem destes dois processos e como a excitação é alterada pelo sistema.

Supondo-se uma infinidade de registros, conforme a figura IV.22, obtidos de sistemas lineares idênticos para os quais as respostas a impulsos aplicados são $h_1(t)$ e $h_2(t)$ e as respostas em frequência são $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$, a resposta para mais

de duas solicitações poderá ser obtida através da solução para duas solicitações. As funções $h_1(t)$ e $H_1(\omega)$ fornecem a resposta $y(t)$ devido à solicitação $x_1(t)$ e as funções $h_2(t)$ e $H_2(\omega)$ fornecem a resposta $y(t)$ devido à solicitação $x_2(t)$.

De acordo com a equação (IV.154), a resposta $y(t)$ para um registro relativo às solicitações $x_1(t)$ e $x_2(t)$ pode ser expressa por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta) x_1(t-\theta) d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta) x_2(t-\theta) d\theta \quad (\text{IV.155})$$

Para calcular a média $E[y(t)]$ do conjunto de registros, é necessário calcular a média de cada uma das integrais da equação (IV.155). Aplicando a equação (IV.64), obtém-se:

$$E[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta) E[x_1(t-\theta)] d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta) E[x_2(t-\theta)] d\theta \quad (\text{IV.156})$$

Sendo as duas solicitações estacionárias, seus valores médios $E[x_1]$ e $E[x_2]$ independem do tempo $(t-\theta)$, concluindo-se que $E[y(t)]$ também independe do tempo, o que resulta em:

$$E[y] = E[x_1] \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta) d\theta + E[x_2] \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta) d\theta \quad (\text{IV.157})$$

Utilizando-se a equação (IV.145), pode-se expressar a equação (IV.157) em termos da resposta em frequência. Fazendo-se $\omega = 0$ em (IV.145) obtém-se:

$$H(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \quad (\text{IV.158})$$

Substituindo (IV.158) em (IV.157), chega-se a:

$$E[y] = E[x_1] H_1(0) + E[x_2] H_2(0) \quad (\text{IV.159})$$

A função de auto-correlação da resposta é dada por $E[y(t) y(t+\tau)]$. De acordo com a equação (IV.155), substituindo-se θ por θ_1 e θ_2 , obtêm-se para $y(t)$ e $y(t+\tau)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1) x_1(t-\theta_1) d\theta_1 + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_1) x_2(t-\theta_1) d\theta_1 \quad (\text{IV.160})$$

e

$$y(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_2) x_1(t+\tau-\theta_2) d\theta_2 + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_2) x_2(t+\tau-\theta_2) d\theta_2 \quad (\text{IV.161})$$

Substituindo (IV.160) e (IV.161), resulta:

$$\begin{aligned} E[y(t) y(t+\tau)] &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1) x_1(t-\theta_1) d\theta_1 \cdot \right. \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_2) x_1(t+\tau-\theta_2) d\theta_2 + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1) x_1(t-\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_2) x_2(t+\tau-\theta_2) d\theta_2 + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_1) x_2(t-\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_2) x_1(t+\tau-\theta_2) d\theta_2 + \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_1) x_2(t-\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_2) x_2(t+\tau-\theta_2) d\theta_2 \right] \quad (\text{IV.162}) \end{aligned}$$

O produto de duas integrais em (IV.162) pode ser expresso como uma integral dupla, o que resulta, para uma delas, em:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1) x_1(t-\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_2) x_1(t+\tau-\theta_2) d\theta_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1) h_1(\theta_2) x_1(t-\theta_1) x_1(t+\tau-\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (\text{IV.163}) \end{aligned}$$

A média desta integral dupla pode ser obtida da seguinte forma:

$$E[I] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1) h_1(\theta_2) E[x_1(t-\theta_1) x_1(t+\tau-\theta_2)] d\theta_1 d\theta_2 \quad (\text{IV.164})$$

Sendo o processo $x_1(t)$ estacionário, a função de auto-correlação independe do tempo absoluto t , e portanto:

$$E[x_1(t-\theta_1) x_1(t+\tau-\theta_2)] = R_{x_1}(\tau-\theta_2+\theta_1) \quad (\text{IV.165})$$

O primeiro produto de integrais da equação (IV.162) pode ser expresso por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1) h_1(\theta_2) R_{x_1}(\tau-\theta_2+\theta_1) d\theta_1 d\theta_2 \quad (\text{IV.166})$$

Aplicando-se este raciocínio às outras integrais da equação (IV.168), chega-se à função de auto-correlação, independente do tempo absoluto t :

$$\begin{aligned} R_y(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1) h_1(\theta_2) R_{x_1}(\tau-\theta_2+\theta_1) d\theta_1 d\theta_2 + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1) h_2(\theta_2) R_{x_1 x_2}(\tau-\theta_2+\theta_1) d\theta_1 d\theta_2 + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_1) h_1(\theta_2) R_{x_2 x_1}(\tau-\theta_2+\theta_1) d\theta_1 d\theta_2 + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_1) h_2(\theta_2) R_{x_2}(\tau-\theta_2+\theta_1) d\theta_1 d\theta_2 \quad (\text{IV.167}) \end{aligned}$$

A função de auto-correlação da resposta, $R_y(\tau)$, é independente do tempo absoluto t para os processos estacionários, bem como todas as médias do processo aleatório relativo à resposta são invariantes no tempo, sendo o próprio processo esta

cionário.

Aplicando-se a transformada de Fourier à primeira integral dupla da equação (IV.167), obtém-se:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_2 h_1(\theta_1) h_1(\theta_2) R_{x_1}(\tau - \theta_2 + \theta_1) \right\} \quad (\text{IV.168})$$

Alterando a ordem das integrais, obtém-se:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 h_1(\theta_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_2 h_1(\theta_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} R_{x_1}(\tau - \theta_2 + \theta_1) \quad (\text{IV.169})$$

A última integral da equação (IV.169) pode ser escrita como:

$$e^{i\omega(\theta_1 - \theta_2)} \int_{-\infty}^{\infty} d(\tau - \theta_2 + \theta_1) e^{-i\omega(\tau - \theta_2 + \theta_1)} R_{x_1}(\tau - \theta_2 + \theta_1) \quad (\text{IV.170})$$

De acordo com (IV.88), esta equação é igual a:

$$e^{i\omega(\theta_1 - \theta_2)} 2\pi S_{x_1}(\omega) \quad (\text{IV.171})$$

A equação (IV.169) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 h_1(\theta_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_2 h_1(\theta_2) e^{i\omega(\theta_1 - \theta_2)} S_{x_1}(\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 h_1(\theta_1) e^{i\omega\theta_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_2 h_1(\theta_2) e^{-i\omega\theta_2} S_{x_1}(\omega) \end{aligned} \quad (\text{IV.172})$$

As duas integrais da equação (IV.172) podem ser relacionadas à resposta em frequência $H(\omega)$, de acordo com (IV.145), o que resulta em:

$$H_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_2) e^{-i\omega\theta_2} d\theta_2 \quad (\text{IV.173})$$

O complexo conjugado de (IV.173) é dado por:

$$H_1^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1) e^{i\omega\theta_1} d\theta_1 \quad (\text{IV.174})$$

Substituindo-se (IV.173) e (IV.174) em (IV.172), chega-se a:

$$I_1 = H_1^*(\omega) H_1(\omega) S_{x_1}(\omega) \quad (\text{IV.175})$$

Aplicando-se o mesmo raciocínio às outras integrais, obtêm-se a expressão da densidade espectral do processo da resposta:

$$\begin{aligned} S_y(\omega) = & H_1^*(\omega) H_1(\omega) S_{x_1}(\omega) + H_1^*(\omega) H_2(\omega) S_{x_1 x_2}(\omega) + \\ & + H_2^*(\omega) H_1(\omega) S_{x_2 x_1}(\omega) + H_2^*(\omega) H_2(\omega) S_{x_2}(\omega) \end{aligned} \quad (\text{IV.176})$$

Para N solicitações, pode-se demonstrar que:

$$S_y(\omega) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N H_r^*(\omega) H_s(\omega) S_{x_r x_s}(\omega) \quad (\text{IV.177})$$

onde

$$S_{x_r x_r} = S_{x_r}$$

Para uma única solicitação, tem-se que:

$$S_y(\omega) = H^*(\omega) H(\omega) S_x(\omega) \quad (\text{IV.178})$$

ou

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (\text{IV.179})$$

Para solicitações não correlacionadas, para as quais os termos relativos a densidade espectral cruzada são nulos, a equação (IV.177) pode ser escrita como:

$$S_y(\omega) = \sum_{r=1}^N |H_r(\omega)|^2 S_{x_r}(\omega) \quad (\text{IV.180})$$

O valor médio quadrático pode ser obtido diretamente de (IV.91):

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega \quad (\text{IV.181})$$

Para uma única solicitação, tem-se que:

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \quad (\text{IV.182})$$

Para N solicitações não correlacionadas, obtém-se:

$$E[y^2] = \sum_{r=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} |H_r(\omega)|^2 S_{x_r}(\omega) d\omega \quad (\text{IV.183})$$

Para solicitações correlacionadas, o valor médio quadrático da resposta não pode ser expresso pela soma dos valores médios quadráticos de cada resposta, sendo necessário avaliar-se (IV.177) e aplicar-se (IV.91).

No caso de um sistema submetido a várias solicitações, pode-se determinar a correlação cruzada entre a resposta e uma das solicitações, através da equação:

$$R_{x_1 y}(\tau) = E[x_1(t) y(t+\tau)] \quad (\text{IV.76})$$

Para o caso de duas solicitações, substituindo-se a equação (IV.161) em (IV.76), obtém-se:

$$\begin{aligned} R_{x_1 y}(\tau) = E \left[x_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta) x_1(t+\tau-\theta) d\theta + \right. \\ \left. + x_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta) x_2(t+\tau-\theta) d\theta \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.184})$$

Fazendo-se algumas substituições em (IV.184), chega-se a:

$$R_{x_1 y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta) R_{x_1}(\tau-\theta) d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta) R_{x_1 x_2}(\tau-\theta) d\theta \quad (\text{IV.185})$$

Aplicando-se a transformada de Fourier na equação (IV.185), obtêm-se a densidade espectral cruzada:

$$\begin{aligned} S_{x_1 y}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta h_1(\theta) e^{-i\omega\theta} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R_{x_1}(\tau-\theta) e^{-i\omega(\tau-\theta)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta h_2(\theta) e^{-i\omega\theta} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R_{x_1 x_2}(\tau-\theta) e^{-i\omega(\tau-\theta)} \end{aligned} \quad (\text{IV.186})$$

As integrais em função de τ possuem θ como constante, podendo-se substituir $(\tau-\theta)$ por ϕ , sendo que $d\tau$ torna-se $d\phi$. Aplicando-se (IV.88) e (IV.117) para determinar as integrais em relação a ϕ e (IV.145) para determinar as integrais em relação a θ , obtêm-se:

$$S_{x_1 y}(\omega) = H_1(\omega) S_{x_1}(\omega) + H_2(\omega) S_{x_1 x_2}(\omega) \quad (\text{IV.187})$$

Para N solicitações separadas, (IV.187) transforma-se no somatório:

$$S_{x_r y} = \sum_{s=1}^N H_s(\omega) S_{x_r x_s}(\omega) \quad (\text{IV.188})$$

onde

$$S_{x_r x_r} = S_{x_r}$$

Para solicitações não correlacionadas, tem-se que:

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega) S_x(\omega) \quad (\text{IV.189})$$

De acordo com as equações (IV.129) e (IV.130), chega-se a:

$$S_{yx}(\omega) = S_{xy}^*(\omega) = H^*(\omega) S_x(\omega) \quad (\text{IV.190})$$

A relação entre a distribuição de probabilidade da resposta de um sistema linear em função da distribuição de probabilidade da solicitação é difícil de ser determinada, exceto para o caso das solicitações cuja distribuição é Gaussiana. Para estes casos, aplica-se o seguinte teorema: se y_1 e y_2 são um par de variáveis aleatórias cuja distribuição de probabilidade é Gaussiana, e se y é definido como:

$$y = y_1 + y_2 \quad (\text{IV.191})$$

a nova variável y também é Gaussiana. Este resultado pode ser aplicado para mostrar que a resposta $y(t)$ de um sistema linear é Gaussiana se a solicitação $x(t)$ também o for.

Grande parte dos fenômenos físicos podem ser considerados como fenômenos lineares, estacionários, ergódicos e gaussianos, sendo o comportamento Gaussiano assegurado pelo Teorema do Limite Central (1 e 22).

Este teorema afirma que, para um conjunto x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, de variáveis aleatórias estatisticamente independentes, possuindo idênticas funções de distribuição, médias finitas m_i e variâncias finitas σ_i^2 , a distribuição de probabilidade de uma nova variável $y = \sum_i^n x_i$ aproxima-se da função de distribuição normal, ou de Gauss, com média $m_y = \sum_i^n m_x$ e variância

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \text{ quando } n \text{ tende para infinito.}$$

Desta forma, um processo aleatório terá sua distribuição de probabilidade aproximadamente Gaussiana se seus registros forem gerados pela superposição de um grande número de fontes aleatórias.

IV.3.3 - Processos de Banda Estreita e Banda Larga

Foi visto, no item anterior, como as características da excitação são alteradas pelo sistema estrutural. Um tipo frequente de resposta é a que se caracteriza por processo de banda estreita conforme a figura IV.17, decorrente, geralmente, de solicitações com banda larga. Para uma resposta do tipo banda estreita, cuja solicitação é Gaussiana, podem-se determinar as funções densidade de probabilidade de 1ª e 2ª ordens, $p(y)$ e $p(y, \dot{y})$, dadas pelas equações (IV.7) e (IV.45), sendo necessário, para isto, definir médias e desvio-padrão.

Supondo que o valor médio de y seja nulo, o valor médio de \dot{y} também será nulo. Esta suposição é válida para problemas lineares em que é possível decompor a resposta em duas parcelas, uma invariante no tempo, estática, representada pelo valor médio, e a outra dinâmica, cujas flutuações em torno da média são definidas pelo desvio-padrão σ . Na análise da fadiga, por exemplo, o parâmetro de interesse é a amplitude da variação das tensões, obtida através do dobro do seu desvio-padrão.

A densidade espectral do processo \dot{y} pode ser obtida da equação (IV.114), resultando em:

$$S_{\dot{y}}(\omega) = \omega^2 S_y(\omega) \quad (\text{IV.192})$$

A partir das equações (IV.17) e (IV.91), pode-se deduzir as variâncias, supondo que $E[y] = E[\dot{y}] = 0$:

$$\sigma_y^2 = E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = 2 S_0 \Delta\omega \quad (\text{IV.193})$$

e

$$\sigma_{\dot{y}}^2 = E[\dot{y}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_y(\omega) d\omega \approx 2 S_0 \omega_0^2 \Delta\omega \quad (\text{IV.194})$$

para $\Delta\omega \ll \omega_0$ (figura IV.17)

A covariância normalizada, obtida a partir da equação (IV.61), resulta em:

$$\rho_{y\dot{y}} = \frac{E[y\dot{y}]}{\sigma_y \sigma_{\dot{y}}} \quad (\text{IV.195})$$

O valor de $E[y\dot{y}]$ pode ser obtido de (IV.105), ou seja:

$$E[y\dot{y}] = \left. \frac{d}{d\tau} R_y(\tau) \right|_{\tau=0} \quad (\text{IV.196})$$

Aplicando a equação (IV.97) em (IV.196), resulta:

$$E[y\dot{y}] = i \int_{-\infty}^{\infty} \omega S_y(\omega) d\omega \quad (\text{IV.197})$$

A integral em (IV.197) é nula, e portanto:

$$E[y\dot{y}] = 0 \quad (\text{IV.198})$$

Pode-se concluir que, num processo aleatório estacionário $y(t)$, y e sua derivada \dot{y} não são correlacionados e, portanto, a covariância normalizada $\rho_{y\dot{y}}$ é sempre nula.

Substituindo os parâmetros deduzidos de (IV.193) a (IV.198) em (IV.7) e (IV.45), obtêm-se:

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \quad (\text{IV.199})$$

e

$$p(y, \dot{y}) = \frac{1}{2\pi\sigma_y \sigma_{\dot{y}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{\dot{y}^2}{\sigma_{\dot{y}}^2}\right)} = p(y) p(\dot{y}) \quad (\text{IV.200})$$

Conhecidas as funções de densidade de probabilidade de 1ª e 2ª ordens, podem ser obtidas também, para processos de banda estreita, informações sobre a distribuição dos picos, conforme indicado na figura IV.23.

Supondo-se que o registro indicado faça parte de um processo aleatório estacionário $y(t)$, pode-se determinar o número de ciclos, com declividade positiva, que cruzam o nível $y = a$ durante o período de tempo T , representado por $n_a^+(T)$. A média, para todos os registros, é dada por:

$$N_a^+(T) = E[n_a^+(T)] \quad (\text{IV.201})$$

Para um processo estacionário, o valor médio dos cruzamentos é proporcional ao intervalo de tempo T , o que resulta em:

$$N_a^+(T) = v_a^+ T \quad (\text{IV.202})$$

onde v_a^+ é a frequência média de cruzamentos, com declividade positiva, do nível $y = a$, que pode ser deduzida a partir das distribuições de probabilidade de $y(t)$.

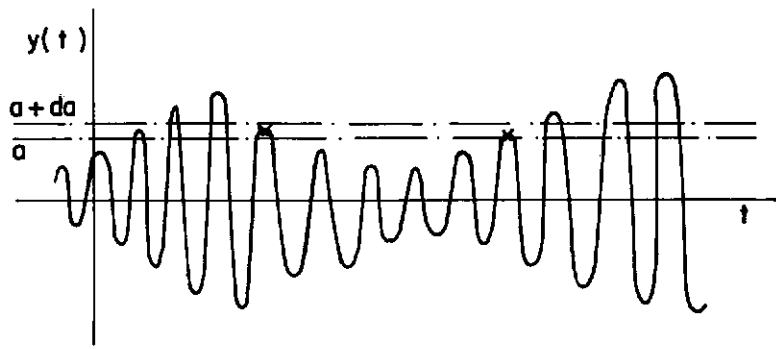
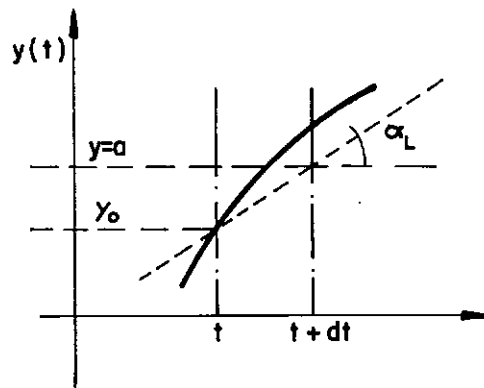
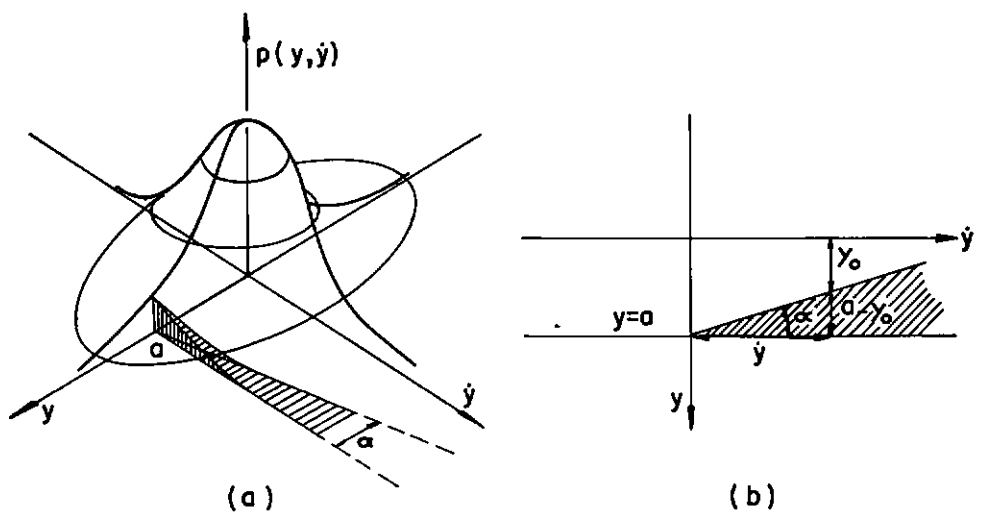


FIGURA IV.23_Processo de banda estreita

FIGURA IV.24_Condições para cruzamento com declividade positiva em $y = a$ FIGURA IV.25_Probabilidade de ocorrência de cruzamento com declividade positiva em $y = a$

Considerando-se que o processo de banda estreita $y(t)$ seja uma função contínua, de variação suave num intervalo de tempo dt suficientemente pequeno, a curva $y(t)$ cruzará o nível $y = a$ com declividade positiva se esta for maior que um valor limite, ou seja:

$$\frac{dy}{dt} > \alpha_L = \frac{a - y_0}{dt} \quad (\text{IV.203})$$

de acordo com a figura IV.24, e se $y_0 < a$.

Analisando-se, agora, a função densidade de probabilidade de 2ª ordem da figura IV.25, verifica-se que a área triangular hachurada representa a condição limite:

$$\text{tg } \alpha = \dot{y} = \frac{a - y_0}{\dot{y}} \quad (\text{IV.204})$$

A probabilidade de ocorrência de valores de y e \dot{y} dentro do limite hachurado é dado por:

$$P = \text{Prob} (\text{cruzamentos de } y = a \text{ com declividade positiva em } dt) =$$

$$= \int_0^\infty d\dot{y} \int_{a - \dot{y} \text{tg} \alpha}^a p(y, \dot{y}) dy \quad (\text{IV.205})$$

Se $dt \rightarrow 0$, $\alpha = dt \rightarrow 0$, e portanto:

$$p(y, \dot{y}) = p(a, \dot{y}) \quad (\text{IV.206})$$

Desta forma, a equação (IV.205) se reduz a:

$$P = \int_0^\infty p(a, \dot{y}) d\dot{y} \quad (\text{IV.207})$$

ou ainda

$$P = \int_0^{\infty} p(a, \dot{y}) \dot{y} dt d\dot{y} = dt \left[\int_0^{\infty} p(a, \dot{y}) \dot{y} d\dot{y} \right] \quad (\text{IV.208})$$

O número de cruzamentos no intervalo dt é $v_a^+ dt$, que é igual à probabilidade de ocorrência de qualquer cruzamento em $y = a$ com declividade positiva, ou seja:

$$v_a^+ dt = \left[\int_0^{\infty} p(a, \dot{y}) \dot{y} d\dot{y} \right] dt \quad (\text{IV.209})$$

Finalmente, tem-se que:

$$v_a^+ = \int_0^{\infty} p(a, \dot{y}) \dot{y} d\dot{y} \quad (\text{IV.210})$$

No caso particular da distribuição de probabilidade ser Gaussiana, substituindo-se (IV.200) em (IV.210), resulta:

$$v_a^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} e^{-a^2/2\sigma_y^2} \quad (\text{IV.211})$$

Tomando o nível $a = 0$, obtém-se a frequência média de cruzamento do nível $y = 0$:

$$f_0 = v_0^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} \quad (\text{IV.212})$$

Definindo-se como momento do espectro a variável M_n , tem-se:

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n S_y(\omega) d\omega \quad (\text{IV.213})$$

Substituindo (IV.213) em (IV.212), resulta:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{M_2}{M_0} \right]^{1/2} \quad (\text{IV.214})$$

A probabilidade de ocorrência de um pico cuja magnitude esteja entre a e $a+da$ (figura IV.23) é dada por:

$$p_p(a) da \quad (IV.215)$$

A probabilidade de que um pico ultrapasse o valor a , é:

$$\int_a^{\infty} p_p(a) da \quad (IV.216)$$

Para um processo de banda estreita, existem $v_0^+ T$ ciclos durante o período de tempo T , dos quais $v_a^+ T$ ultrapassam o valor $y = a$, podendo-se concluir que a probabilidade de ocorrência de ciclos que ultrapassem $y = a$ é dada por:

$$\int_a^{\infty} p_p(a) da = \frac{v_a^+}{v_0^+} \quad (IV.217)$$

Derivando-se (IV.217) em relação a a , obtém-se:

$$-p_p(a) = \frac{1}{v_0^+} \frac{dv_a^+}{da} \quad (IV.218)$$

No caso particular de $y(t)$ ser um processo Gaussiano, substituindo-se (IV.211) em (IV.218), obtém-se:

$$p_p(a) = \frac{a}{\sigma_y^2} e^{-a^2/2\sigma_y^2}, \text{ para } 0 < a < \infty \quad (IV.219)$$

A equação (IV.219) é a distribuição de Rayleigh, ilustrada na figura IV.26.

A utilização da distribuição de Rayleigh para

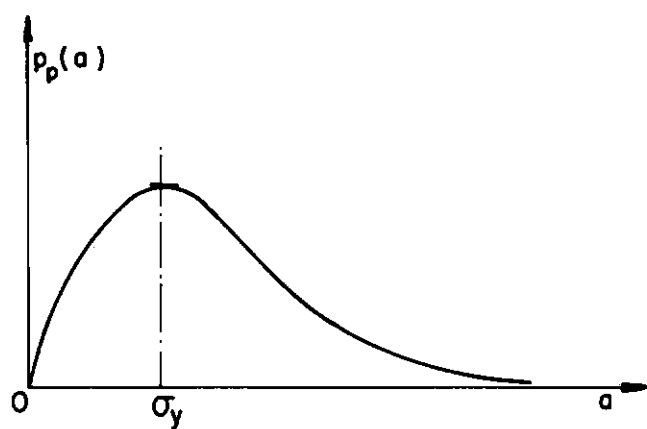


FIGURA IV.26_ Distribuição de Rayleigh

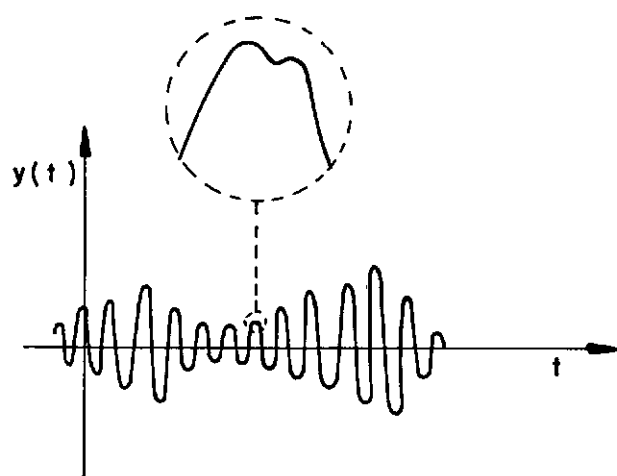


FIGURA IV. 27

um processo Gaussiano de banda estreita depende do fato de que o processo $y(t)$ não possua irregularidades que alterem a distribuição, conforme a figura IV.27. Isto implica em que a frequência de ocorrência de valores máximos de $y(t)$, v_m , deva ser igual à frequência de ocorrência de cruzamentos do nível zero do processo derivado $\dot{y}(t)$, ou seja, há apenas um pico para cada cruzamento do nível $y = 0$. Os valores máximos ocorrem quando $dy/dt = 0$ e d^2y/dt^2 é negativo. O valor de v_m pode ser obtido substituindo-se $\sigma_{\dot{y}}$ e $\sigma_{\ddot{y}}$ em (IV.211), e fazendo-se $\dot{y} = a = 0$, o que resulta em:

$$v_m = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\ddot{y}}}{\sigma_{\dot{y}}} \quad (\text{IV.220})$$

Portanto, para um processo de banda estreita, deve ser satisfeita a condição:

$$v_m = v_o^+ \quad (\text{IV.221})$$

O valor de v_m pode ser expresso através dos momentos do espectro, de acordo com a equação (IV.213), resultando:

$$v_m = f_m = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M_4}{M_2} \right)^{1/2} \quad (\text{IV.222})$$

O parâmetro ϵ é utilizado para determinar a largura do espectro, sendo definido por:

$$\epsilon = 1 - \frac{f_o}{f_m} \quad (\text{IV.223})$$

onde $\epsilon=0$ para um processo de banda infinitamente estreita e $\epsilon=1$ para um processo de banda infinitamente larga.

Um processo de banda estreita pode apresentar

irregularidades, como mostra a figura IV.27, incluindo valores máximos adicionais. No entanto, de um modo geral, pode-se utilizar a distribuição de Rayleigh, que fornece bons resultados para a determinação da ocorrência de picos, ignorando-se as pequenas irregularidades que surjam.

Quando o processo não é de banda estreita, a função densidade de probabilidade é dada por (12):

$$p(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_y} \left[\epsilon \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma_y^2} \frac{1}{\epsilon} \right) + (1-\epsilon^2)^{1/2} \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{y}{\sigma_y} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \int_{-\infty}^{\frac{y}{\sqrt{\sigma_y^2} \epsilon}} \frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon} \exp \left(-\frac{1}{2} t^2 \right) dt \right] \quad (\text{IV.224})$$

No limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$, a equação (IV.224) se reduz à distribuição de Rayleigh, e quando $\epsilon \rightarrow 1$, à distribuição de Gauss.

IV.4 - ANÁLISE PARA SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

Para os sistemas estruturais com vários graus de liberdade, submetidos a solicitações de caráter aleatório, os procedimentos para determinação da resposta são os mesmos desenvolvidos nos itens (IV.2) e (IV.3), determinando-se médias, variâncias, densidades espectrais, etc..., dos deslocamentos e esforços que surgem na estrutura. A relação entre a densidade espectral da solicitação e a da resposta é equivalente à equação

(IV.177), onde a resposta em frequência compreende todos os graus de liberdade da estrutura. Um procedimento para a avaliação da relação entre as densidades espectrais da solicitação e da resposta, consiste em se aplicar a transformada de Fourier ao sistema de equações diferenciais:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}}\underline{U} = \underline{F}(t) \quad (\text{II.16})$$

obtendo-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[-\omega^2 \underline{\underline{M}} + i\omega \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}} \right] \underline{\hat{U}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\hat{F}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{IV.225})$$

onde

$$\underline{U}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\hat{U}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\underline{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\hat{F}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A equação (IV.225) pode ser escrita como:

$$\left[\underline{\underline{K}} + i\omega \underline{\underline{C}} - \omega^2 \underline{\underline{M}} \right] \underline{\hat{U}}(\omega) = \underline{\hat{F}}(\omega) \quad (\text{IV.226})$$

ou

$$\underline{\hat{Z}}(\omega) \underline{\hat{U}}(\omega) = \underline{\hat{F}}(\omega) \quad (\text{IV.227})$$

A inversa de (IV.227) é dada por:

$$\underline{\hat{U}}(\omega) = \underline{\hat{H}}(\omega) \underline{\hat{F}}(\omega) \quad (\text{IV.228})$$

O conjugado da transformada de Fourier é obtido através de (IV.226), resultando em:

$$\left[\underline{\underline{K}} - i\omega \underline{\underline{C}} - \omega^2 \underline{\underline{M}} \right] \underline{\hat{U}}^*(\omega) = \underline{\hat{F}}^*(\omega) \quad (\text{IV.229})$$

ou

$$\underline{\hat{Z}}^*(\omega) \underline{\hat{U}}^*(\omega) = \underline{\hat{F}}^*(\omega) \quad (\text{IV.230})$$

cuja inversa é:

$$\underline{\hat{U}}^*(\omega) = \underline{\hat{H}}^*(\omega) \underline{\hat{F}}^*(\omega) \quad (\text{IV.231})$$

Multiplicando-se as equações (IV.228) e (IV.231), obtém-se:

$$\underline{\hat{U}}(\omega) \underline{\hat{U}}^{*t}(\omega) = \underline{\hat{H}}(\omega) \underline{\hat{F}}(\omega) \underline{\hat{F}}^{*t}(\omega) \underline{\hat{H}}^{*t}(\omega) \quad (\text{IV.232})$$

Dividindo-se ambos os lados pelo período T , e fazendo-se $T \rightarrow \infty$, tem-se:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\underline{\hat{U}}(\omega) \underline{\hat{U}}^{*t}(\omega)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \underline{\hat{H}}(\omega) \frac{\underline{\hat{F}}(\omega) \underline{\hat{F}}^{*t}(\omega)}{T} \underline{\hat{H}}^{*t}(\omega) \quad (\text{IV.233})$$

O valor médio quadrático pode, também, ser definido como:

$$E[x^2(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t) dt \quad (\text{IV.234})$$

Aplicando o conceito de transformada de Fourier, a equação (IV.234) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} E[x^2(t)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{i\omega t} dt \right] d\omega \quad (\text{IV.235}) \end{aligned}$$

O termo relativo à segunda integral é o conjugado de $\hat{x}(\omega)$, designado por $\hat{x}^*(\omega)$. Desta forma, obtém-se:

$$E[x^2(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) \hat{x}^*(\omega) d\omega \quad (\text{IV.236})$$

Comparando-se as equações (IV.91) e (IV.236), chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \hat{x}(\omega) \hat{x}^*(\omega) d\omega = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{x}(\omega)|^2}{T} d\omega \end{aligned} \quad (\text{IV.237})$$

Portanto, a densidade espectral de $x(t)$ pode ser expressa por:

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\hat{x}(\omega)|^2}{T} \quad (\text{IV.238})$$

Aplicando-se (IV.238) em (IV.233), chega-se

a:

$$\underline{S}_U(\omega) = \underline{\hat{H}}(\omega) \underline{S}_F(\omega) \underline{\hat{H}}^{*t}(\omega) \quad (\text{IV.239})$$

onde

$$\underline{S}_U(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\underline{\hat{U}}(\omega) \underline{\hat{U}}^{*t}(\omega)}{T} \quad (\text{IV.240})$$

e

$$\underline{S}_F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\underline{\hat{F}}(\omega) \underline{\hat{F}}^{*t}(\omega)}{T} \quad (\text{IV.241})$$

Supondo-se que a densidade espectral da solicitação possa ser expressa por:

$$\underline{S}_F = \underline{\hat{F}}(\omega) \underline{S}_f(\omega) \underline{\hat{F}}^{*t}(\omega) \quad (\text{IV.242})$$

Substituindo (IV.242) em (IV.239), tem-se:

$$\underline{S}_U = \underline{\hat{H}}(\omega) \underline{\hat{F}}(\omega) \underline{S}_f(\omega) \underline{\hat{F}}^{*t} \underline{\hat{H}}^{*t}(\omega) \quad (\text{IV.243})$$

Aplicando (IV.228) e (IV.231) em (IV.243),
chega-se a:

$$\underline{S}_U = \underline{\hat{U}}(\omega) \underline{S}_f(\omega) \underline{\hat{U}}^{*t} \quad (\text{IV.244})$$

Conhecido o valor de \underline{S}_U , pode-se determinar o valor médio quadrático e outros dados estatísticos desejados de deslocamentos, velocidades e acelerações:

$$E[U^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega) d\omega \quad (\text{IV.245})$$

$$E[\dot{U}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_U(\omega) d\omega \quad (\text{IV.246})$$

$$E[\ddot{U}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_U(\omega) d\omega \quad (\text{IV.247})$$

A densidade espectral dos esforços nos elementos é obtida de maneira equivalente a (IV.244):

$$\underline{S}_E = \underline{\hat{E}}(\omega) \underline{S}_f(\omega) \underline{\hat{E}}^{*t} \quad (\text{IV.248})$$

onde

$$\underline{\hat{E}}(\omega) = \underline{K}^e \underline{\hat{U}}(\omega)$$

\underline{K}^e é a matriz de rigidez do elemento

Desta forma, conhecida a solicitação e sua densidade espectral, pode-se compor o espectro da resposta avaliando-se a resposta permanente da estrutura para cada frequência que

compõe o espectro, obtendo-se o valor da integral através de um método numérico de integração.

C A P Í T U L O VFADIGAV.1 - INTRODUÇÃO

Denomina-se colapso por fadiga à ruptura de um membro estrutural submetido a esforços variáveis e repetidos, num nível de tensões inferiores à tensão máxima admissível do material. Este fenômeno ocorre, principalmente, em estruturas metálicas soldadas, submetidas a carregamento variável, assumindo significativa importância nas estruturas offshore, pois as plataformas apresentam um aumento nos períodos naturais com a profundidade da lâmina d'água, ficando sensíveis aos efeitos dinâmicos provocados por ações ambientais.

A avaliação da resposta da estrutura às cargas dinâmicas, implica no desenvolvimento de métodos adequados e técnicas específicas de análise dinâmica, pois podem muitas vezes alterar significativamente o anteprojeto dessas estruturas.

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos de fadiga estrutural, visando as estruturas metálicas compostas de membros tubulares, e um procedimento de cálculo para avaliação do dano acumulado e da vida útil de estruturas submetidas a excitações de caráter determinístico ou aleatório.

Nas referências (27 a 54) encontram-se informações e procedimentos para avaliação da fadiga.

V.2 - CONCEITOS BÁSICOS

O colapso de uma estrutura, submetida a carregamento externo, pode ser ocasionado por dois fatores diferentes. Um deles seria a ocorrência de um nível de tensões elevado, atingindo a tensão máxima admissível do material. Neste caso, a estrutura é dimensionada utilizando-se as cargas de projeto, mantendo-se as tensões dentro dos limites admissíveis.

O outro fator seria a fadiga do material decorrente do dano cumulativo produzido pela ação repetitiva de cargas cíclicas, variáveis no tempo, que são resultantes da ação de máquinas em operação ou de efeitos ambientais, tais como ventos, ondas do mar, correntes marítimas, etc... Esta variação do carregamento produz flutuações cíclicas de tensões nos membros da estrutura, induzindo à propagação de fissuras e ao conseqüente colapso, que ocorre mesmo que as tensões não tenham atingido a tensão máxima admissível do material.

No caso de juntas tubulares, há uma probabilidade maior de ocorrência deste fenômeno devido, principalmente, aos seguintes aspectos (27,28):

- (a) verifica-se que as juntas soldadas são as mais sensíveis ao aparecimento e desenvolvimento de fissuras, pois os próprios processos de fabricação podem ocasionar defeitos de soldagem que atuam como iniciadores de fissuras.
- (b) a geometria da junta influencia na concentração das tensões na região onde a fissura está na iminência de

se iniciar. Esta região é denominada "hot-spot", e as tensões que se desenvolvem denominam-se "hot-spot stresses". Tem-se verificado que o colapso por fadiga ocorre com maior frequência na interseção entre brace e chord, região denominada "saddle" (29), indicada nas figuras V.1 e V.2.

- (c) as plataformas offshore estão submetidas a carregamentos variáveis no tempo, de ação repetitiva, principalmente fenômenos ambientais (ventos, correntes, ondas), que produzem flutuações cíclicas de tensões em seus membros, ocasionando a propagação das fissuras.

Em estruturas offshore constituídas de membros tubulares soldados, o efeito da fadiga deve ser devidamente considerado no dimensionamento, o que não é muito simples de ser realizado, pois o cálculo do dano é muito sensível, dependendo de fatores como (30):

- correta determinação do carregamento atuante na estrutura, sendo que no caso de efeitos ambientais pode ser necessário proceder a uma análise aleatória.
- o modelo estrutural deve representar convenientemente os detalhes estruturais, o que implica num aumento do número de graus de liberdade, encarecendo a análise.
- o método de análise deve ser bastante preciso na determinação dos esforços e tensões, ao mesmo tempo não induzindo a esforços computacionais inviáveis.
- a fadiga é um fenômeno localizado, caracterizado pela propagação de fissuras iniciais nos filetes de solda que unem

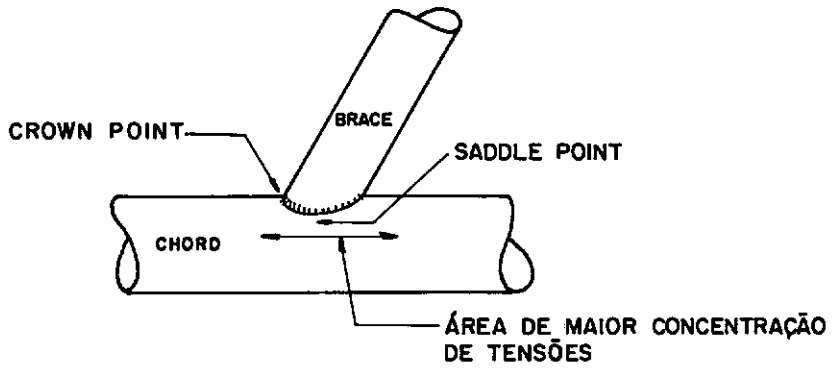


FIGURA V.1 _ Região da junta onde ocorre maior concentração de tensões

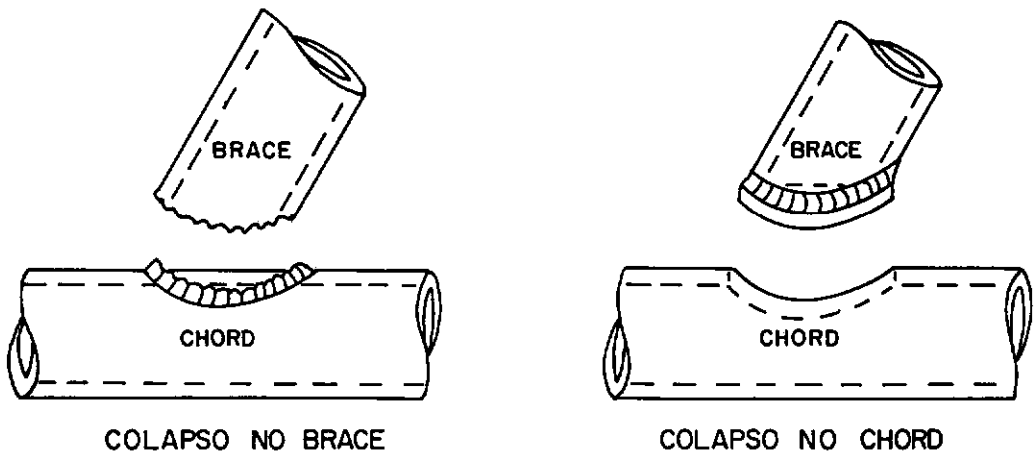


FIGURA V.2 _ Tipos de colapso na junta

os membros da estrutura, e o dano provocado em cada membro depende da história completa da flutuação de tensões durante toda a sua vida útil.

Segundo um trabalho desenvolvido por Vandiver (31), pode-se verificar o quanto o cálculo da fadiga é influenciado pela correta avaliação das frequências naturais e modos de vibração e pelo amortecimento.

As imprecisões que ocorrem na avaliação dos modos de vibração são devidas aos modelos adotados na representação da estrutura, principalmente no que se refere ao comportamento do solo.

A estimativa do amortecimento também está sujeita a falhas devidas à falta de resultados precisos de amortecimento das estruturas já existentes, e também da dificuldade de acesso a técnicas que permitam sua obtenção.

Estes aspectos implicam na necessidade de uma análise acurada para a obtenção, a mais precisa possível, da história das tensões ao longo da vida útil da estrutura e do dano acumulado.

As técnicas atuais de análise estrutural, apesar de sofisticadas, ainda não são plenamente satisfatórias no que diz respeito ao cálculo da fadiga, devido à complexidade do fenômeno em si. Os procedimentos apresentados a seguir, habitualmente utilizados, permitem fazer uma estimativa da vida útil dos membros estruturais onde ocorre fadiga.

V.3 - FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES E HOT-SPOT STRESSES

Como já foi dito anteriormente, a fadiga ocorre devido à variação cíclica de tensões, a uma certa frequência, nos membros da estrutura.

Nas juntas metálicas soldadas existem, inicialmente, tensões próximas à tensão de escoamento do material, devido às tensões residuais que surgem quando do processo de soldagem. Portanto, a flutuação das tensões ocorre a partir da tensão de escoamento, que é o limite superior do intervalo de variação.

Estas flutuações podem ocorrer apenas dentro de limites de tensões de tração, de compressão, ou ainda podem abranger tensões de tração e compressão. O que influencia na propagação das fissuras é o efeito da flutuação das tensões, as amplitudes dos intervalos de variação e sua frequência de ocorrência (número de ciclos) durante toda a vida útil da estrutura. Estas tensões são determinadas através de uma análise dinâmica determinística ou aleatória, dependendo do tipo de solicitação, de acordo com o que foi apresentado nos capítulos III e IV.

Nas estruturas offshore, observa-se que a geometria da junta é muito importante na concentração de tensões que ocorre nas juntas tubulares soldadas. Estas tensões, chamadas de hot-spot stresses, podem ser determinadas, basicamente, através de três métodos: uma análise através do método dos elementos finitos, estudo de modelos físicos ou através de fórmulas paramétricas semi-empíricas.

A utilização do método dos elementos finitos, discretizando-se os membros em malhas refinadas de elementos de cascas, é uma ferramenta eficaz devido à possibilidade de se modelarem geometrias complexas e diferentes condições de contorno. No entanto, um grande número de juntas de diferentes tamanhos e geometrias que compõem as estruturas offshore, apresentam um certo grau de semelhança e regularidade. Desta forma, torna-se possível a utilização de fórmulas paramétricas semi-empíricas que se constituem numa solução prática e economicamente viável para a determinação dos hot-spot stresses, ficando a utilização do Método dos Elementos Finitos relegado para as juntas especiais para as quais não existem estudos de concentração de tensões.

Estas fórmulas permitem a obtenção de um fator de concentração de tensões que estabelece uma relação entre o hot spot stress e a tensão nominal obtida na extremidade dos membros da junta. São compostas de termos adimensionais que se constituem de relações entre os parâmetros geométricos de braces e chords. No Apêndice A encontram-se fórmulas desenvolvidas por Kuang, Smedley, Marshall e Gibstein, (32, 33, 34), e os seus intervalos de validade para utilização. Na figura V.3 são apresentados os tipos mais comuns de juntas tubulares soldadas, e na figura V.4 a nomenclatura dos componentes das juntas. Observa-se que há fórmulas diferentes para o brace e chord, sendo considerados três esforços que atuam no brace e que serão majorados pelo fator de concentração de tensões: o esforço axial, o momento que atua no plano da junta e o que atua fora do plano da junta (figura V.5). Os efeitos de esforços cortantes não demonstraram ser importantes no estudo da fadiga (27).

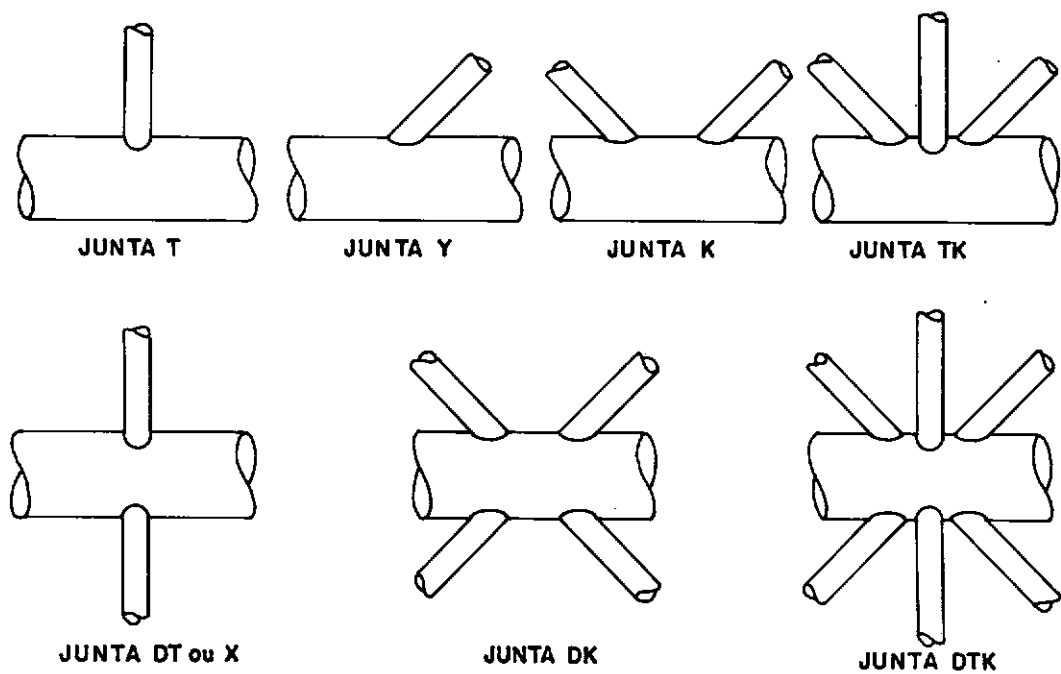


FIGURA V.3 _Tipos mais comuns de juntas

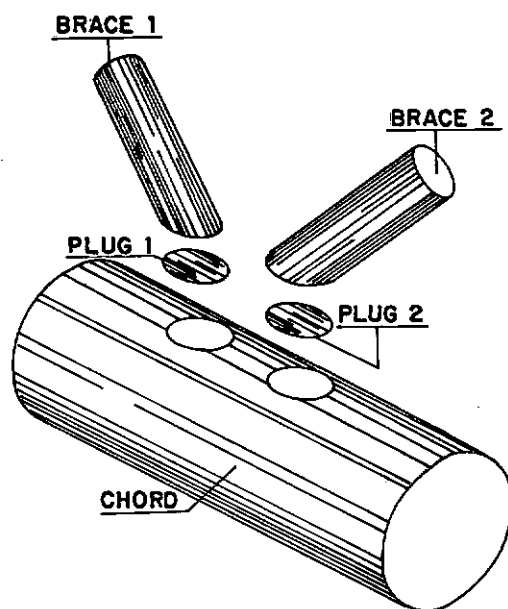


FIGURA V.4 _Partes constituintes de uma junta

No caso de juntas que apresentem geometria muto complexa, é preferível a análise através do Método dos Elementos Finitos, determinando-se as tensões em vários pontos das juntas.

As normas procuram estabelecer limites mínimos seguros para os fatores de concentração de tensões. No caso da DNV (35), este valor é de 2.5 para juntas simples e 5.0 para juntas onde ocorre overlapping.

V.4 - CURVAS S-N

Devido à impossibilidade de avaliar a resistência à fadiga das juntas soldadas através de testes nas estruturas reais, foi necessário basear-se o cálculo da fadiga nos resultados de testes e ensaios obtidos para algumas juntas que resultaram nas curvas S-N. Estas curvas relacionam a amplitude da variação das tensões (S) com o número de ciclos (N) que leva ao colapso, tendo sido obtidas através de dados experimentais em laboratórios e estruturas, analisados estatisticamente, para vários tipos de juntas, situadas no ar ou expostas à água do mar, com proteção contra corrosão (30, 36, 37).

Para cada tipo de junta soldada e situação de carregamento, há uma curva S-N específica, havendo ainda uma distinção entre as curvas que se referem a um tipo particular de junta, onde o fator de concentração de tensões já está implícito, e curvas mais gerais, onde o fator de concentração de tensões é calculado.

Estas curvas são expressas por uma relação li-

near entre $\log S$ e $\log N$, da forma:

$$\log N = \log K_1 - d \log \sigma - m \log S \quad (V.1)$$

onde:

S é a amplitude da variação de tensões

N é o número de ciclos que produz fadiga para a amplitude de tensões

K_1 é a constante relativa à curva S-N média

d é o número de desvios-padrão abaixo da média

$\log(\sigma)$ é o desvio padrão do $\log N$

$-m$ é o inverso da declividade da curva S-N

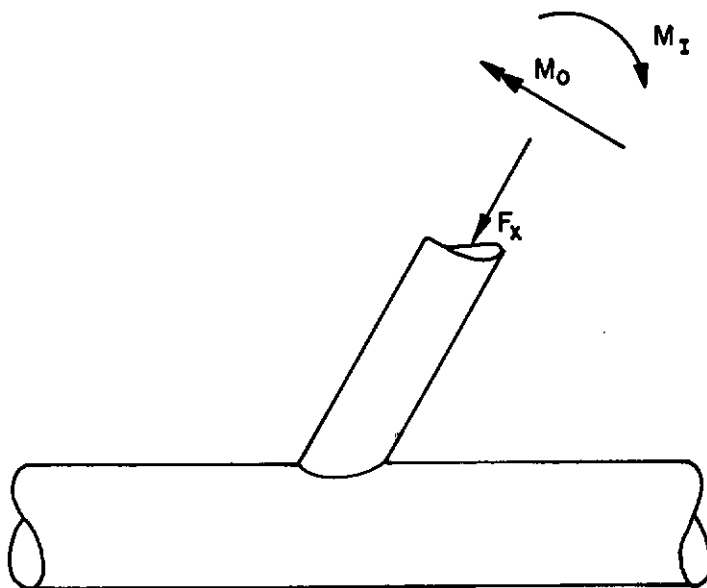
As normas DNV (35) e API (38) fornecem curvas S-N, conforme a curva X da DNV, ilustrada na figura V.6.

Observa-se que, devido ao caráter exponencial das curvas S-N, uma pequena variação na avaliação do valor das tensões pode fornecer grandes variações no valor de N e consequentemente no dano e na vida útil. Também a escolha da curva adequada, em função do tipo de junta e solda, carregamento e condições de exposição, influenciam na avaliação da vida útil.

V.5 - DETERMINAÇÃO DO DANO E VIDA ÚTIL: REGRA DE MINER

Foi mencionado nos itens V.2 e V.3 que o colapso por fadiga das juntas soldadas ocorre em função, principalmente, da amplitude de variação das tensões e do número de ciclos associados, ou frequência de ocorrência. O cálculo do dano é habitualmente feito através da Regra de Miner (27, 28, 47), dada por:

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (V.2)$$



F_x _força axial

M_o _momento atuando fora do plano da junta

M_I _momento atuando no plano da junta

FIGURA V.5 _Componentes dos esforços para determinação dos hot-spot stresses

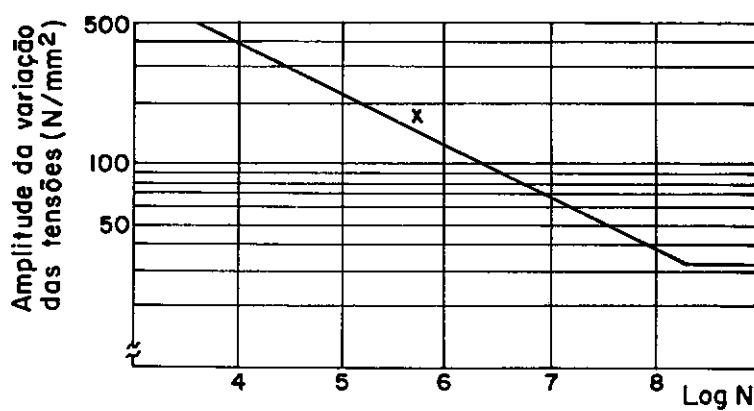


FIGURA V.6 _Curva S.N para juntas tubulares (DNV)

onde

D_i é o dano

n_i é o número de ciclos em que ocorre a amplitude de variação de tensões S_i

N_i é o número de ciclos admissível para o nível de tensões S_i , valor retirado das curvas S-N.

Na análise determinística, o valor de n_i corresponde ao número de ciclos, ou frequência de ocorrência de um certo estado de carregamento i , que atuando sobre a estrutura produz flutuações de tensões cuja amplitude de máxima variação, de crista ao cavado, ocorre na mesma frequência de ocorrência da excitação, correspondendo a ela um número de ciclos admissível N_i . No caso do mar, o número de ciclos n_i , corresponde a cada estado de mar, é obtido de histogramas baseados em dados estatísticos, normalmente avaliados para um ano. O dano acumulado, relativo à ação da totalidade dos n estados de carregamento é dado por:

$$D_T = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} \quad (V.3)$$

Na análise aleatória, a ocorrência dos picos máximos ocorre segundo uma distribuição de probabilidade, conforme já foi estudado na Capítulo IV, que pode ser a distribuição de Rayleigh, para processos de banda estreita, ou Gaussiana, para processos de banda larga.

Para cada estado de carregamento, é calculada a resposta e o desvio padrão das tensões, σ_i , fazendo-se a média igual a zero. Para cada intervalo de tensões, $n \sigma_i$, determina-se a sua probabilidade ou percentagem de ocorrência, P , que multi-

plicada pelo número total de ciclos (NTC) associados ao estado de carregamento i , fornece o número de ciclos n_{ij} associado ao intervalo de tensões $\sigma_j = n \sigma_i$, ou seja:

$$n_{ij} = P \cdot NTC \quad (V.4)$$

O número de ciclos N_{ij} que produz fadiga para o nível de tensões σ_j , é obtido a partir das curvas S-N. O dano acumulado é, portanto, obtido através do somatório dos danos decorrentes de todos os estados de carregamento e de todos os níveis de tensões, ou seja:

$$D_T = \sum_i \sum_j \frac{n_{ij}}{N_{ij}} \quad (V.5)$$

A vida útil é dada pelo inverso do dano acumulado, ou seja:

$$\text{Vida útil (anos)} = \frac{1}{D_T} \quad (V.6)$$

C A P Í T U L O VIEXEMPLOSVI.1 - INTRODUÇÃO

Serão apresentados oito exemplos, sendo duas estruturas reais e os outros exemplos acadêmicos. Os exemplos 1 a 3 constam da referência (17) e o exemplo 8 da referência (56). Nestes exemplos procura-se mostrar a eficiência dos métodos desenvolvidos nos itens anteriores, avaliando-se as respostas das estruturas a carregamentos do tipo determinístico e aleatório. Para tanto foi desenvolvido, neste trabalho, um programa computacional em FORTRAN, visando principalmente, automatizar o cálculo da verificação da fadiga estrutural em juntas tubulares metálicas soldadas, submetidas à ação de solicitações dinâmicas de caráter determinístico ou aleatório. Foram implementados os procedimentos de análise apresentados nos Capítulos II a V, possibilitando que o programa, denominado DINFAD, forneça resultados para:

- resposta permanente no domínio da frequência
- resposta aleatória
- resposta para frequência alta de excitação
- vida útil de juntas através de análise determinística ou aleatória.

Na análise dinâmica, foi implementado o Método de Superposição Modal com a Técnica da Correção Estática, utilizando-se o programa DINA (60) para determinação dos modos de vi

bração, bem como para utilização dos elementos finitos implementados.

Os resultados são comparados com os obtidos pelo programa LORANE-DINA (9).

VI.2 - EXEMPLO 1

Este exemplo se constitui de um pórtico plano, ilustrado na figura VI.1, discretizado numa malha de elementos finitos de pórtico de 20 elementos e 15 nós, com 36 graus de liberdade. Nas tabelas VI.1 a VI.2 encontram-se as propriedades geométricas e físicas, respectivamente, comuns a todos os elementos. A estrutura está submetida a carregamento dinâmico permanente, conforme indicado na tabela VI.3, e seu amortecimento é 10% do amortecimento crítico.

As seis primeiras frequências naturais e períodos da estrutura encontram-se na tabela VI.4, podendo-se avaliar a relação entre a frequência de excitação e as duas primeiras frequências naturais:

$$\frac{f}{f_1} = 0.72 \quad \text{e} \quad \frac{f}{f_2} = 0.24$$

A relação entre a frequência de excitação e a segunda frequência natural é baixa, menor que 1/3, podendo-se concluir, através do gráfico da figura III.1, que a partir do segundo modo o comportamento da estrutura é quasi-estático.

Neste exemplo são comparados resultados das amplitudes máximas da resposta da estrutura, obtidos do programa DINPAD, utilizando-se o Método de Superposição Modal com e sem correção estática no domínio da frequência, com os resultados obtidos utilizando-se o Método Direto no domínio da frequência, através do programa LORANE-DINA.

Os resultados dessa comparação estão apresen-

tados nas tabelas VI.5 e VI.6, sob a forma de erro ou diferença percentual, ou seja:

$$E = \frac{|RMM - RMD|}{RMD} \times 100 \quad (VI.1)$$

onde

E é o erro ou diferença percentual

RMM é o resultado obtido utilizando-se o Método de Superposição Modal

RMD é o resultado obtido utilizando-se o Método Direto

O erro percentual foi calculado admitindo-se que os resultados obtidos através do Método Direto são mais precisos.

Na tabela VI.5 são comparados resultados de deslocamentos nas direções globais X e Y e rotação RZ do nó 2, utilizando-se 6 e 12 modos sem correção e 1 e 6 modos com correção, verificando-se que nestes casos a diferença é desprezível. Estes resultados da resposta no steady-state estão nos gráficos das figuras VI.2, VI.3 e VI.4.

Na tabela VI.6 comparam-se os resultados de esforços axiais nas barras, verificando-se uma grande diferença sem a correção estática, ao se utilizar seis modos de vibração, sendo que, em algumas barras, aumentar o número dos modos não implicou em resultados melhores, como as barras 1, 2, 4 e 6. Aplicando-se a correção estática, os esforços convergem tanto com a utilização de um modo, quanto de seis modos, o que pode ser explicado pelas baixas relações entre a frequência de excitação e as frequências naturais a partir do segundo modo. Desta forma, a técnica da correção estática dos modos superiores é plenamente satisfatória.

Neste exemplo não houve diferenças significativas para esforços cortantes e momentos.

Os gráficos das figuras VI.5 e VI.6 representam os esforços axiais nas barras 1 e 5, no steady-state. Através da figura VI.5 está evidenciado que aumentar o número de modos pode não alterar a convergência dos resultados.

Para esta mesma estrutura foi realizada uma análise alterando-se o amortecimento para 6.7%, obtendo-se pequenas diferenças conforme apresentado nas figuras VI.7 e VI.8.

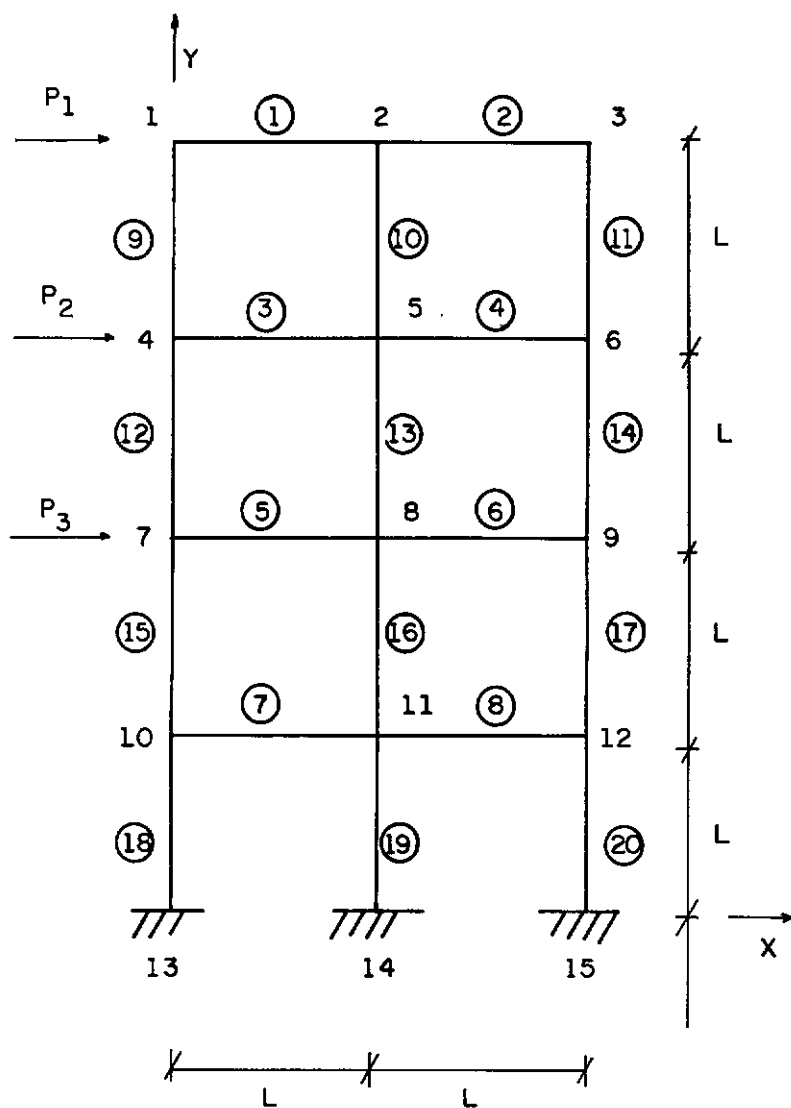


FIGURA.VI 1 - Modelo do pórtico plano

Área da seção transversal	(Ax)	1.00 m ²
Momento de inércia	(Iz)	0.01 m ⁴
Comprimento dos elementos	(L)	5.00 m

TABELA VI.1 - Características geométricas dos elementos

Módulo de elasticidade	(E)	10 ⁴ tf/m ²
Coefficiente de Poisson	(ν)	0
Densidade	(ρ)	0.2 $\frac{\text{tf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^4}$

TABELA VI.2 - Características físicas do material

CARGA	MÓDULO(tf)	FASE	FREQUÊNCIA(HERTZ)
P ₁	1.0	0	0.07
P ₂	0.5	0	0.07
P ₃	0.1	0	0.07

TABELA VI.3 - Dados do carregamento dinâmico

MODOS	PERÍODOS(s)	FREQÜÊNCIA(HERTZ)
1	10.28	0.097
2	3.32	0.301
3	1.95	0.513
4	1.45	0.691
5	0.53	1.897
6	0.45	2.199

TABELA VI.4 - Frequências naturais e períodos

Nº	DIREÇÃO	6 MODOS SEM CORREÇÃO	12 MODOS SEM CORREÇÃO	1 MODOS COM CORREÇÃO	6 MODOS COM CORREÇÃO
2	X	0.03	0.03	0.18	0.02
	Y	5.73	19.57	0.55	0.01
	RZ	0.17	0.17	1.21	0.12

TABELA VI.5 - Diferenças percentuais entre o Método Direto e o Método de Superposição Modal para Deslocamentos nodais

BARRA	6 MODOS SEM CORREÇÃO	12 MODOS SEM CORREÇÃO	1 MODO COM CORREÇÃO	6 MODOS COM CORREÇÃO
1	94.48	94.20	0.04	0.01
2	83.06	83.93	0.09	0.01
3	96.44	26.77	0.07	0.01
4	90.67	74.51	0.22	0.04
5	70.10	21.19	0.34	0.00
6	178.56	124.69	0.21	2.02

TABELA VI.6 - Diferenças percentuais entre o Método
Direto e o Método de Superposição
Modal p/esforços axiais nas barras

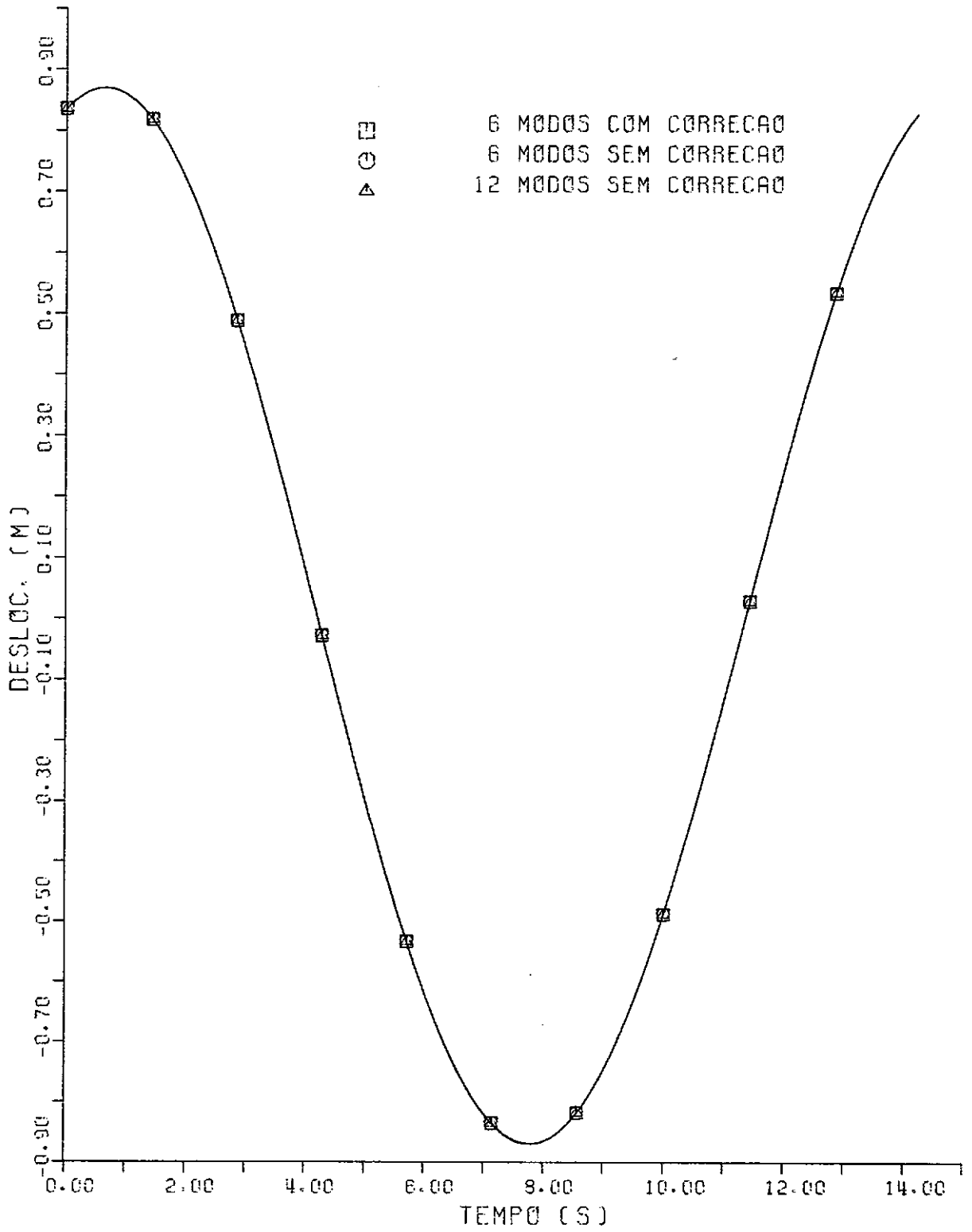


FIGURA VI.2 - DESLOCAMENTO DIR. X - Nº 2

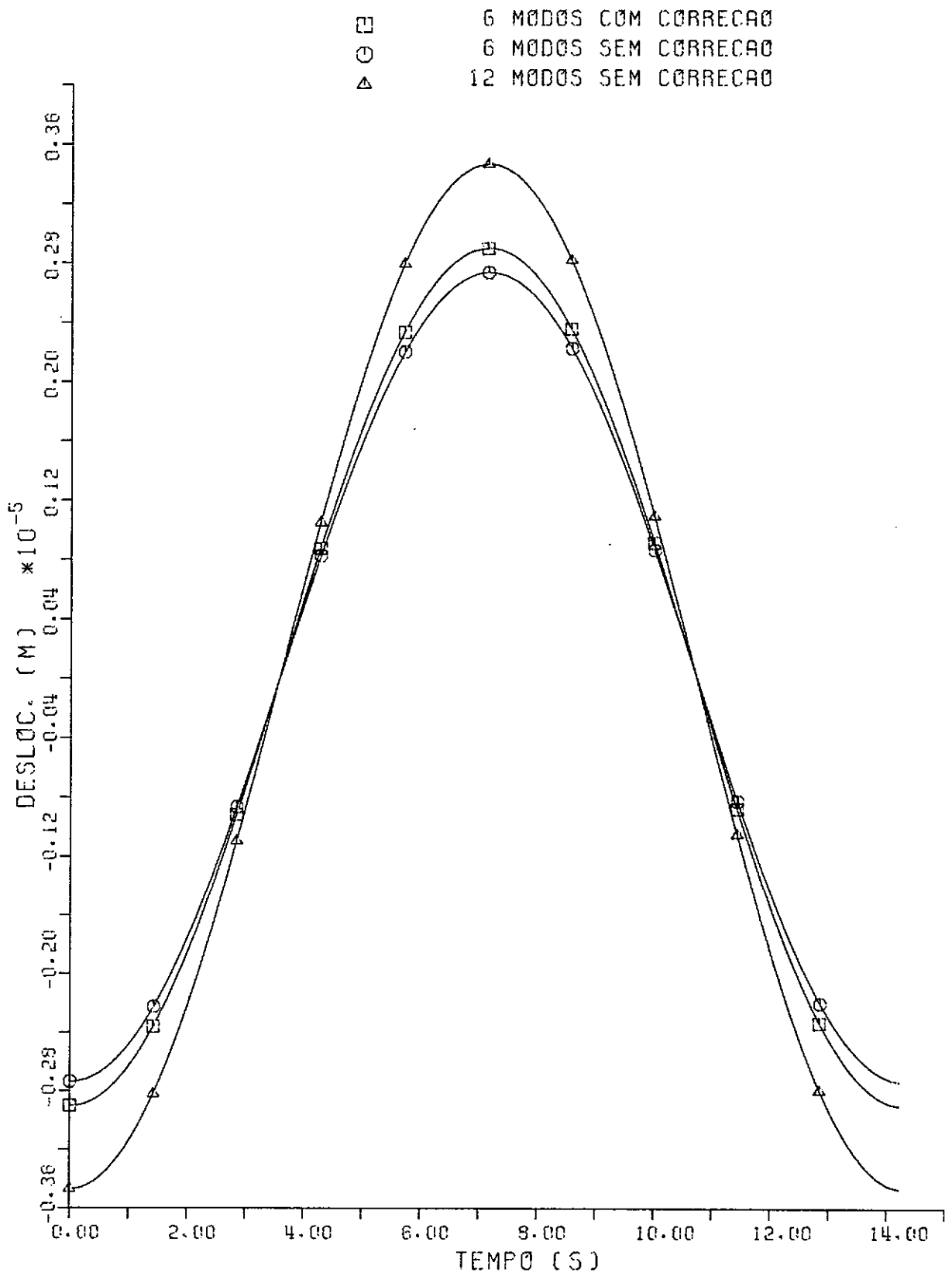


FIGURA VI.3 - DESLOCAMENTO DIR. Y - Nº 2

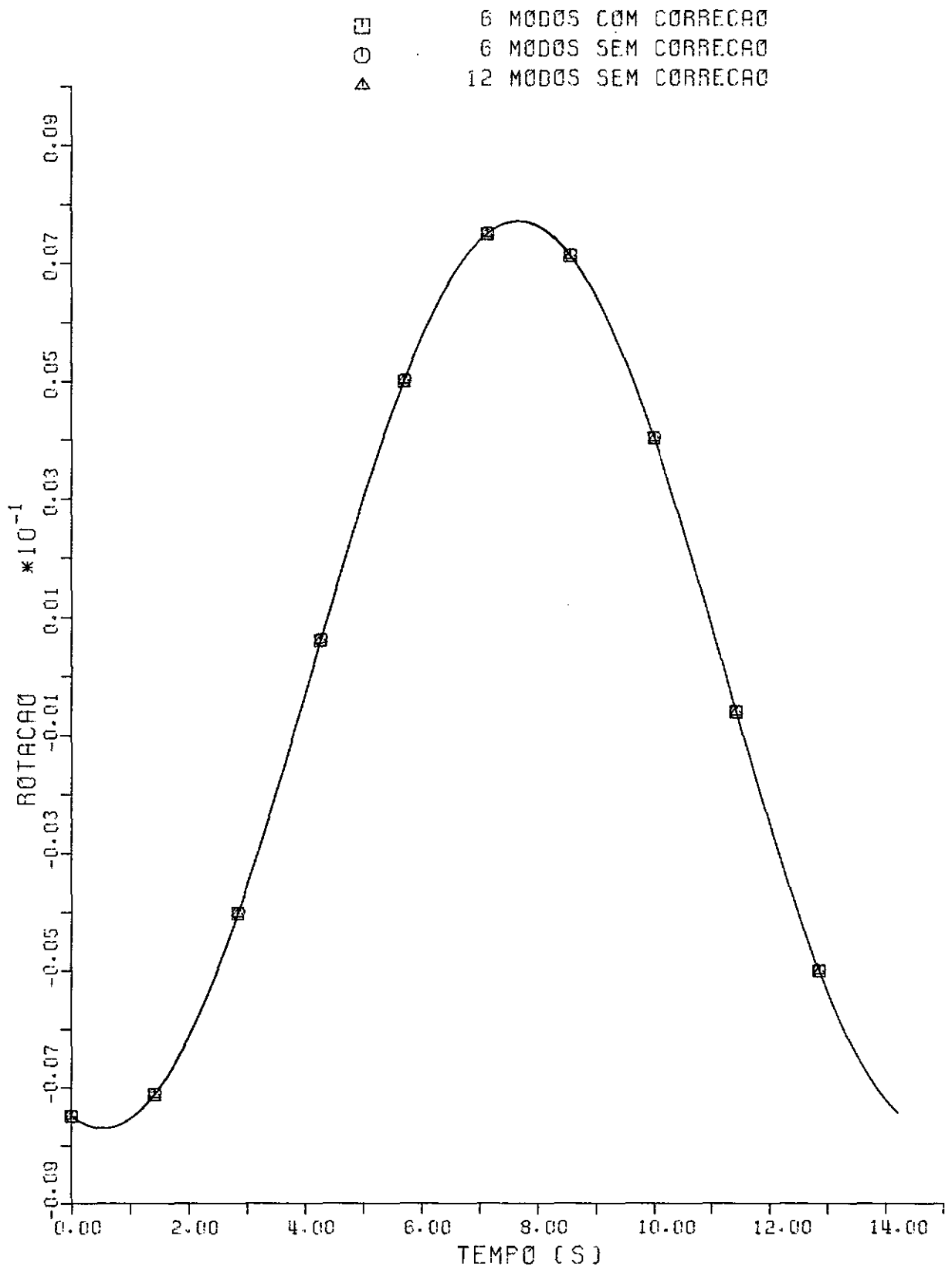


FIGURA VI.4 - ROTACÃO RZ - Nº 2

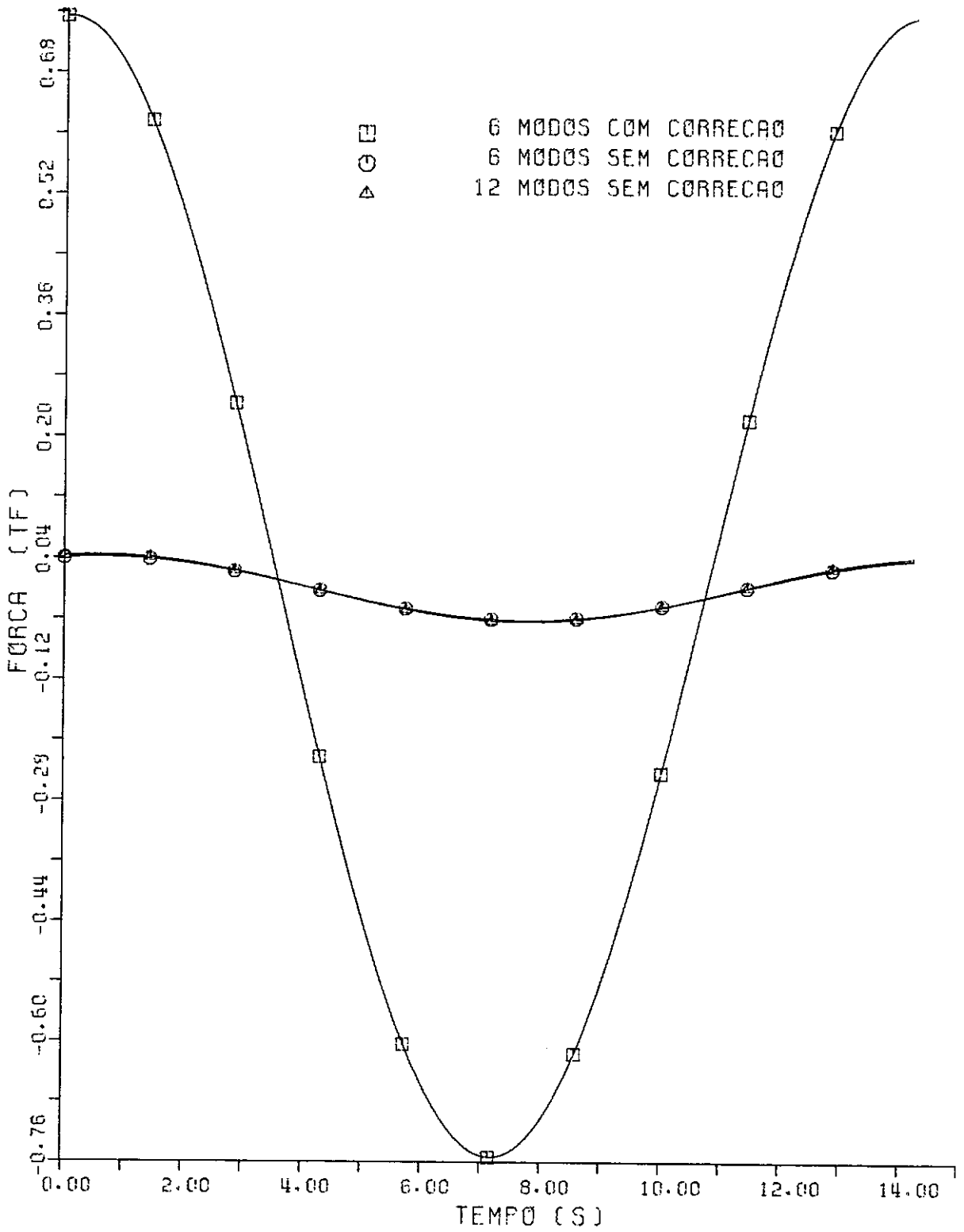


FIGURA VI.5 - ESFORÇO AXIAL - BARRA 1

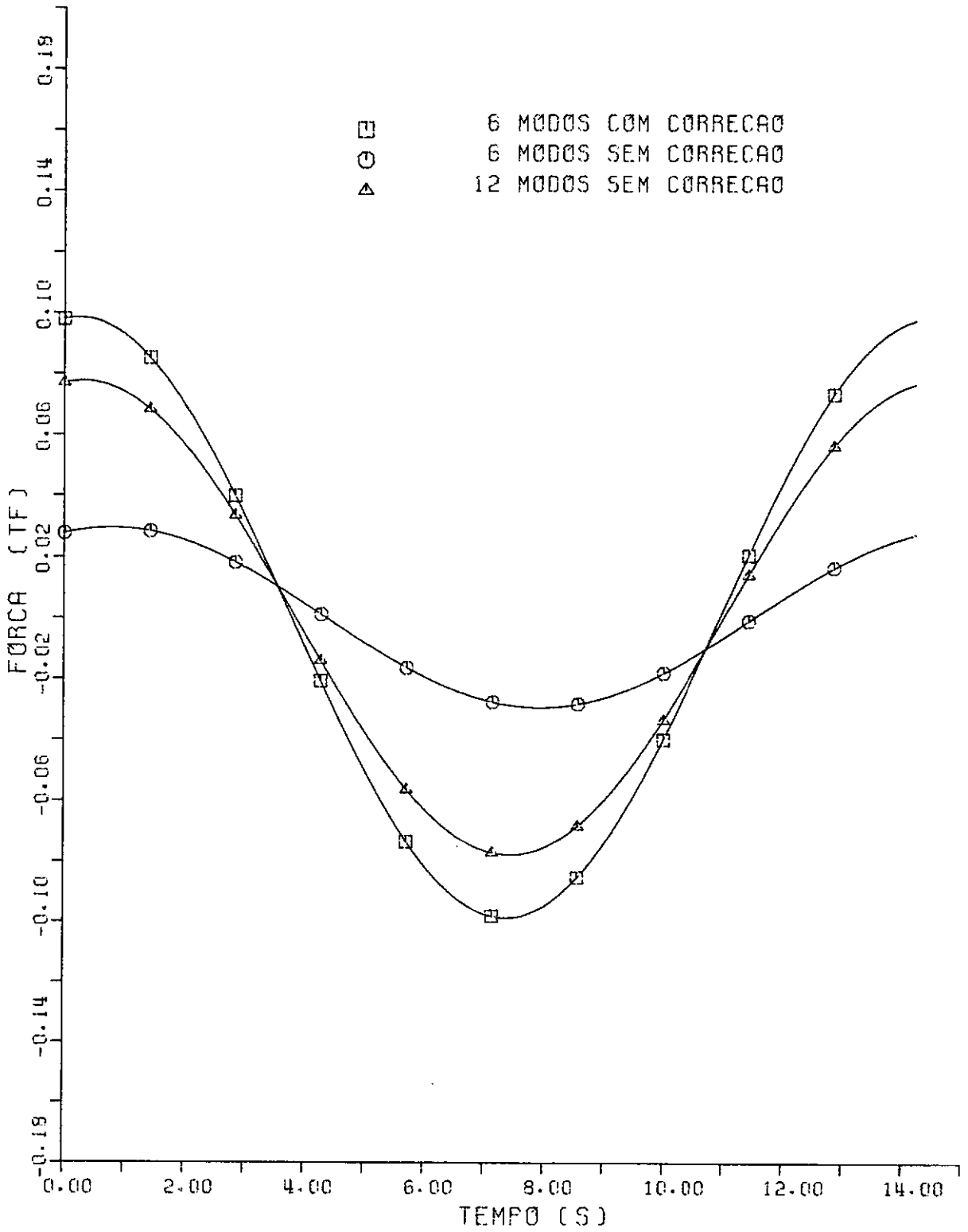


FIGURA VI.6 - ESFORÇO AXIAL - BARRA 5

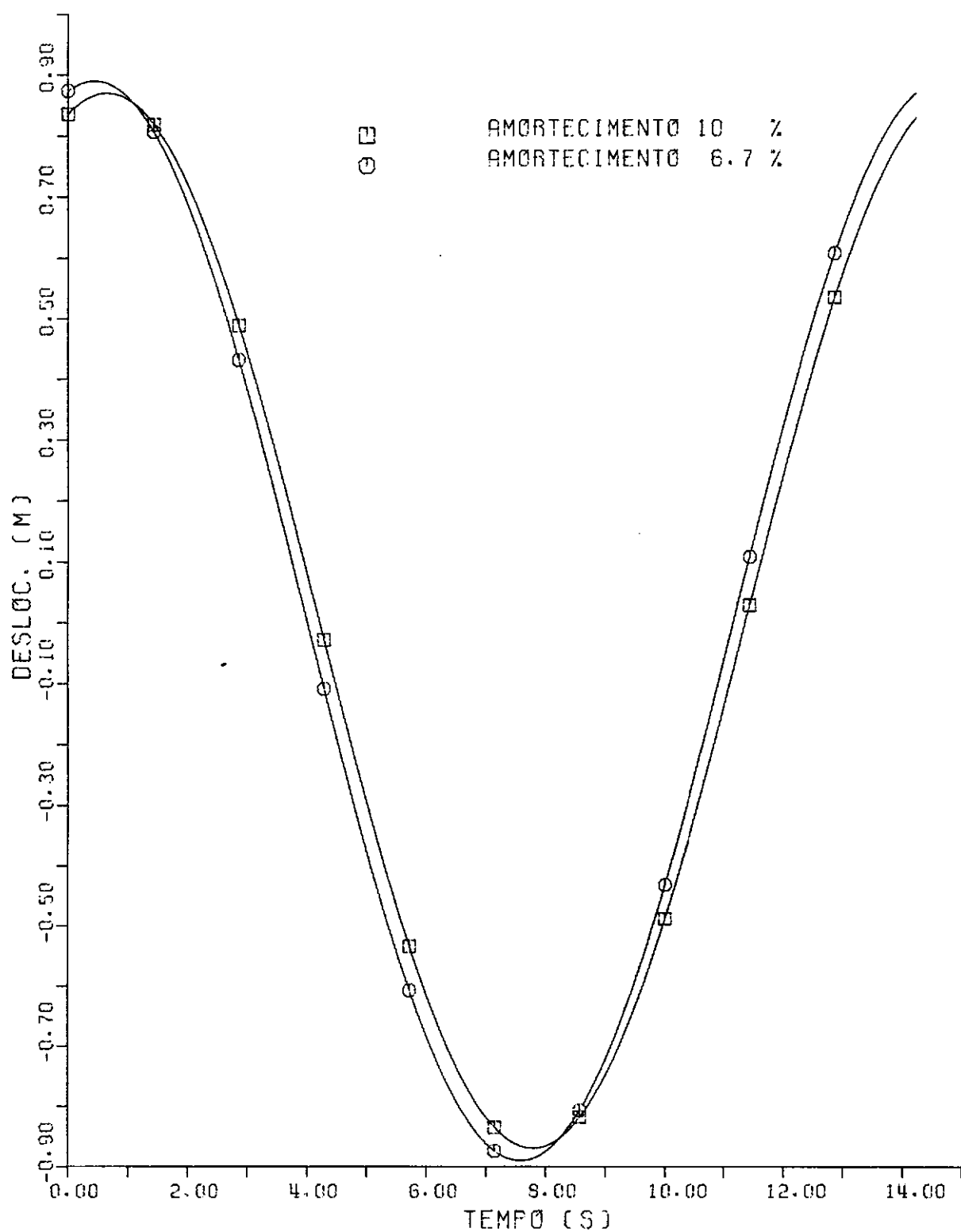


FIGURA VI.7 - DESLOCAMENTO DIR. X - Nº 1

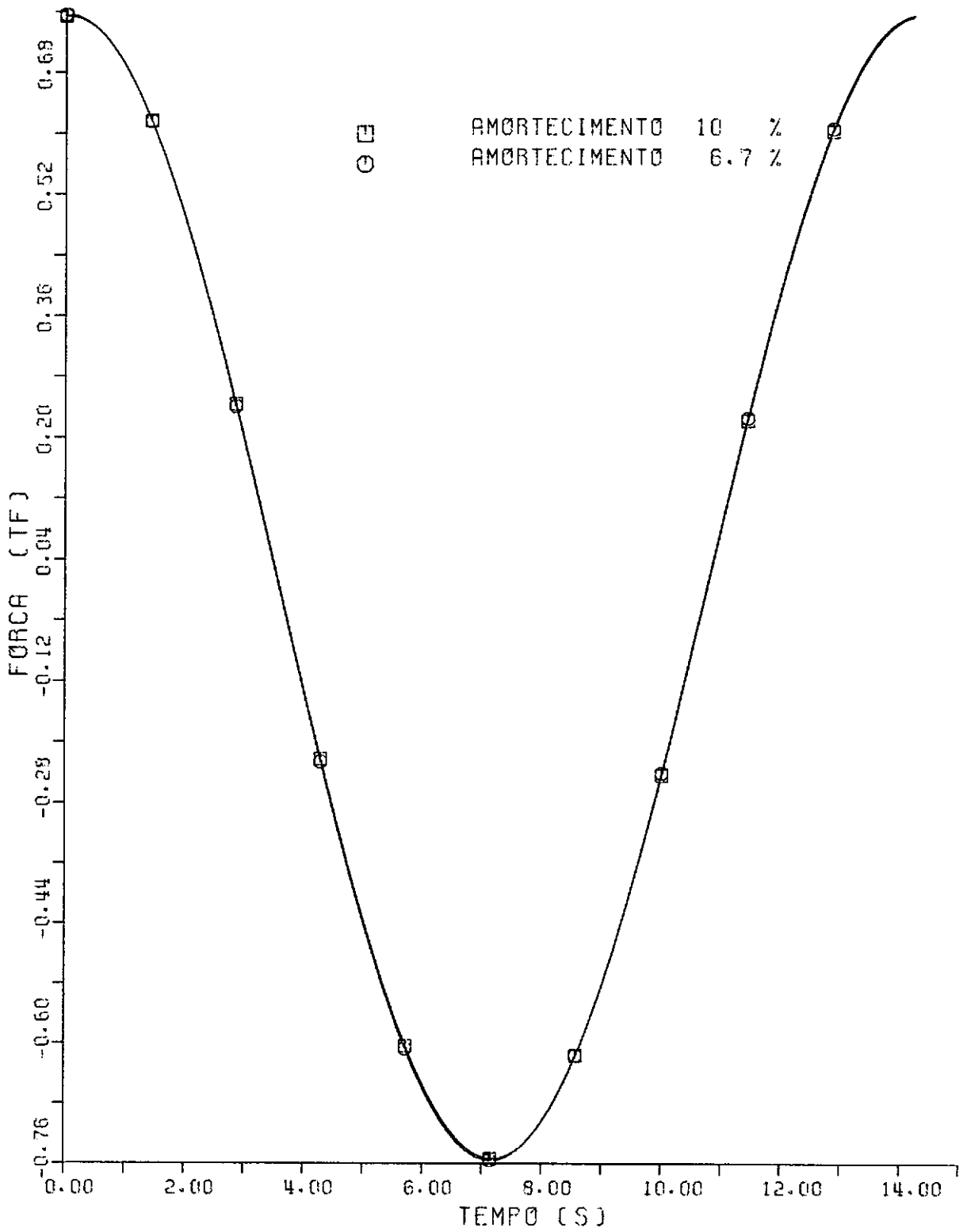


FIGURA VI.8 - ESFORÇO AXIAL - BARRA 1

VI.3 - EXEMPLO 2

Constitui-se de um pórtico plano, ilustrado na figura VI.9 discretizado numa malha de elementos finitos de pórtico de 26 elementos e 15 nós, com 36 graus de liberdade. Nas tabelas VI.1 e VI.2 encontram-se as propriedades físicas e geométricas comuns a todos os elementos. O carregamento permanente é o mesmo do Exemplo 1, de acordo com a tabela VI.3, e o amortecimento é de 6.7% do amortecimento crítico.

Na tabela VI.7 encontram-se as seis primeiras frequências naturais e períodos da estrutura, avaliando-se as relações entre a frequência de excitação e as duas primeiras frequências naturais como sendo:

$$\frac{f}{f_1} = 0.48 \quad \text{e} \quad \frac{f}{f_2} = 0.07$$

Foram comparados resultados de amplitudes máximas obtidos através do Método Direto e do Método de Superposição Modal, com e sem correção estática, pelo DINFAD e LORANE-DINA. As diferenças percentuais encontram-se nas tabelas VI.8 a VI.12, segundo a equação VI.1.

Na tabela VI.8 é feita a análise de deslocamentos nas direções X e Y e rotação RZ do nó 1, verificando-se diferenças muito pequenas. Na figura VI.10 estão ilustrados os gráficos, no steady-state, de deslocamento, velocidade e aceleração na direção X do nó 1, mostrando a diferença de fase que existe entre as curvas. Os gráficos das figuras VI.11, VI.12 e VI.13 mostram os deslocamentos e rotação do nó 1.

Pela tabela VI.9 verificam-se grandes diferenças entre os métodos para esforços axiais, sendo que na barra 2, ao se aumentar o número de modos a diferença aumentou. Aplicando-se a correção estática, com apenas seis modos, os resultados são precisos. Nas figuras VI.14 e VI.15 estão os esforços axiais nas barras 1 e 9, havendo, neste último caso, mudança significativa na fase.

Na tabela VI.10 é feita análise dos esforços axiais nas barras 9 e 11, utilizando-se 6, 10, 12, 15, 23 e 24 modos de vibração sem correção estática. Observa-se que a utilização de um número maior de modos pode melhorar ou piorar os resultados, só havendo convergência quando são utilizados todos os 24 modos de vibração da estrutura. Na figura VI.16, pode-se verificar este comportamento, que reflete a importância da contribuição dos modos mais altos na resposta.

As tabelas VI.11 e VI.12 apresentam os resultados para esforços cortantes e momentos, verificando-se o mesmo comportamento dos esforços axiais.

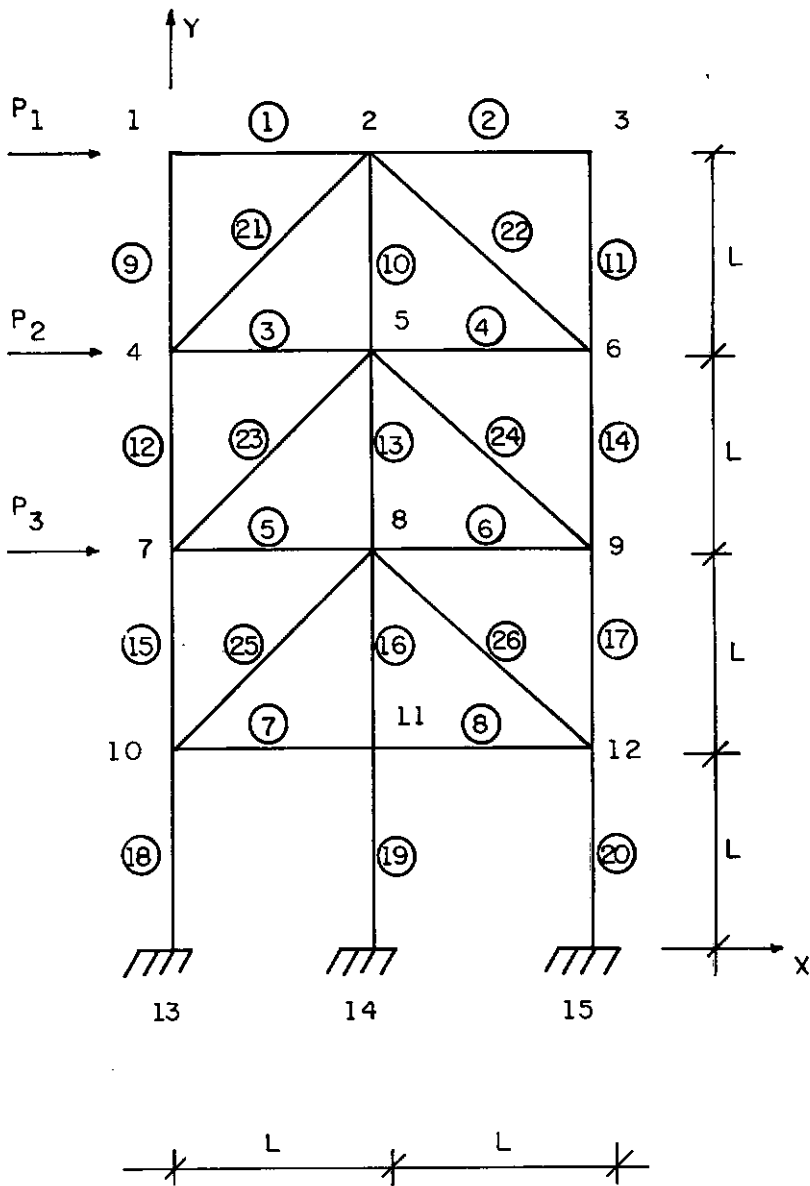


FIGURA VI.9 - Modelo do pórtico plano

MODOS	PERÍODOS (s)	FREQÜÊNCIA(HERTZ)
1	6.85	0.146
2	0.97	1.026
3	0.58	1.726
4	0.40	2.497
5	0.30	3.283
6	0.29	3.464

TABELA VI.7 - Freqüências naturais e períodos

Nº	DIREÇÃO	6 MODOS SEM CORREÇÃO	12 MODOS COM CORREÇÃO	6 MODOS COM CORREÇÃO
1	X	0.40	0.32	0.00
	Y	0.43	0.20	0.01
	RZ	8.19	7.80	0.01

TABELA VI.8 - Diferenças percentuais entre o Método Direto
e o Método de Superposição Modal para
deslocamentos nos nós

BARRA	6 MODOS SEM CORREÇÃO	12 MODOS SEM CORREÇÃO	6 MODOS COM CORREÇÃO
1	79.78	74.67	0.01
2	990.24	1245.02	1.70
9	276.97	42.56	0.29
10	81.51	64.01	0.05
11	1088.77	1803.08	2.00
13	78.54	72.20	0.03
16	131.05	79.39	0.05
19	316.42	177.07	0.08

TABELA VI.9 - Diferenças percentuais entre o Método
Direto e o Método de Superposição
Modal para esforços axiais nas barras

BARRA	6 MODOS SEM CORREÇÃO	10 MODOS SEM CORREÇÃO	12 MODOS SEM CORREÇÃO	15 MODOS SEM CORREÇÃO	23 MODOS SEM CORREÇÃO	24 MODOS SEM CORREÇÃO	6 MODOS COM CORREÇÃO
9	276.97	803.64	42.56	134.34	1126.45	0.25	0.29
11	1088.77	344.55	1803.08	1638.14	2014.84	1.15	2.00

TABELA VI.10 - Diferenças percentuais entre o Método Direto e o Método de Superposição
Modal para esforços axiais nas barras

BARRA	6 MODOS SEM CORREÇÃO	12 MODOS SEM CORREÇÃO	6 MODOS COM CORREÇÃO
1	34.80	21.22	0.01
9	61.03	45.88	0.02
10	32.40	5.46	0.04
11	41.14	87.99	0.06
22	53.47	7.46	0.03

TABELA VI.11 - Diferenças percentuais entre o Método
Direto e o Método de Superposição
Modal para esforços cortantes nas barras

BARRA	Nº	6 MODOS SEM CORREÇÃO	12 MODOS SEM CORREÇÃO	6 MODOS COM CORREÇÃO
1	1	39.59	28.33	0.01
	2	28.18	11.41	0.01
9	1	39.59	28.33	0.02
	4	89.43	83.03	0.01
10	5	76.36	17.67	0.49
11	6	316.18	599.45	4.90
21	2	30.99	19.48	0.00
22	2	229.01	38.13	0.22

TABELA VI.12 - Diferenças percentuais entre o Método
Direto e o Método de Superposição
Modal para momentos nas barras

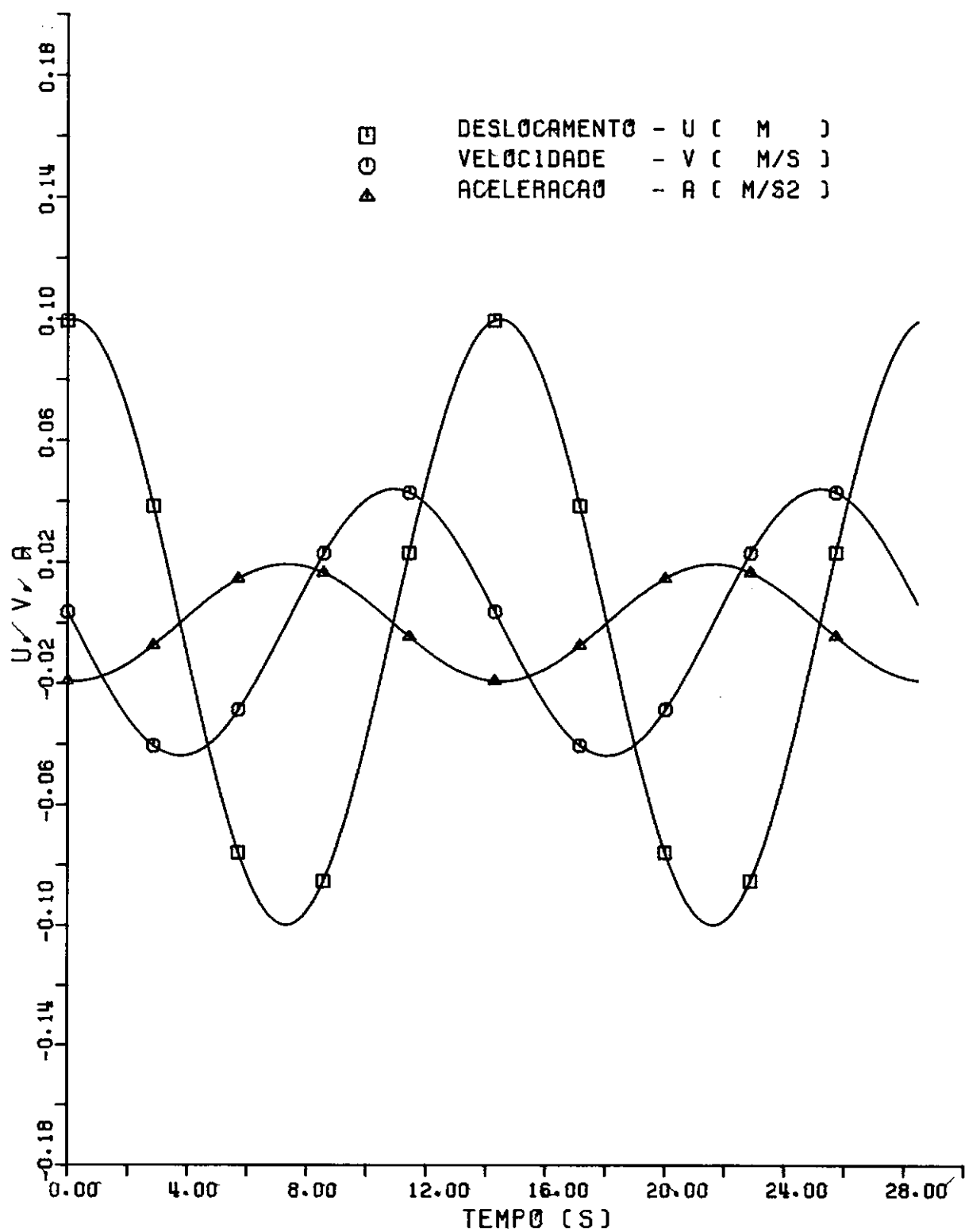


FIGURA VI.10 - DESL., VEL., ACEL. - DIR. X - Nº 1

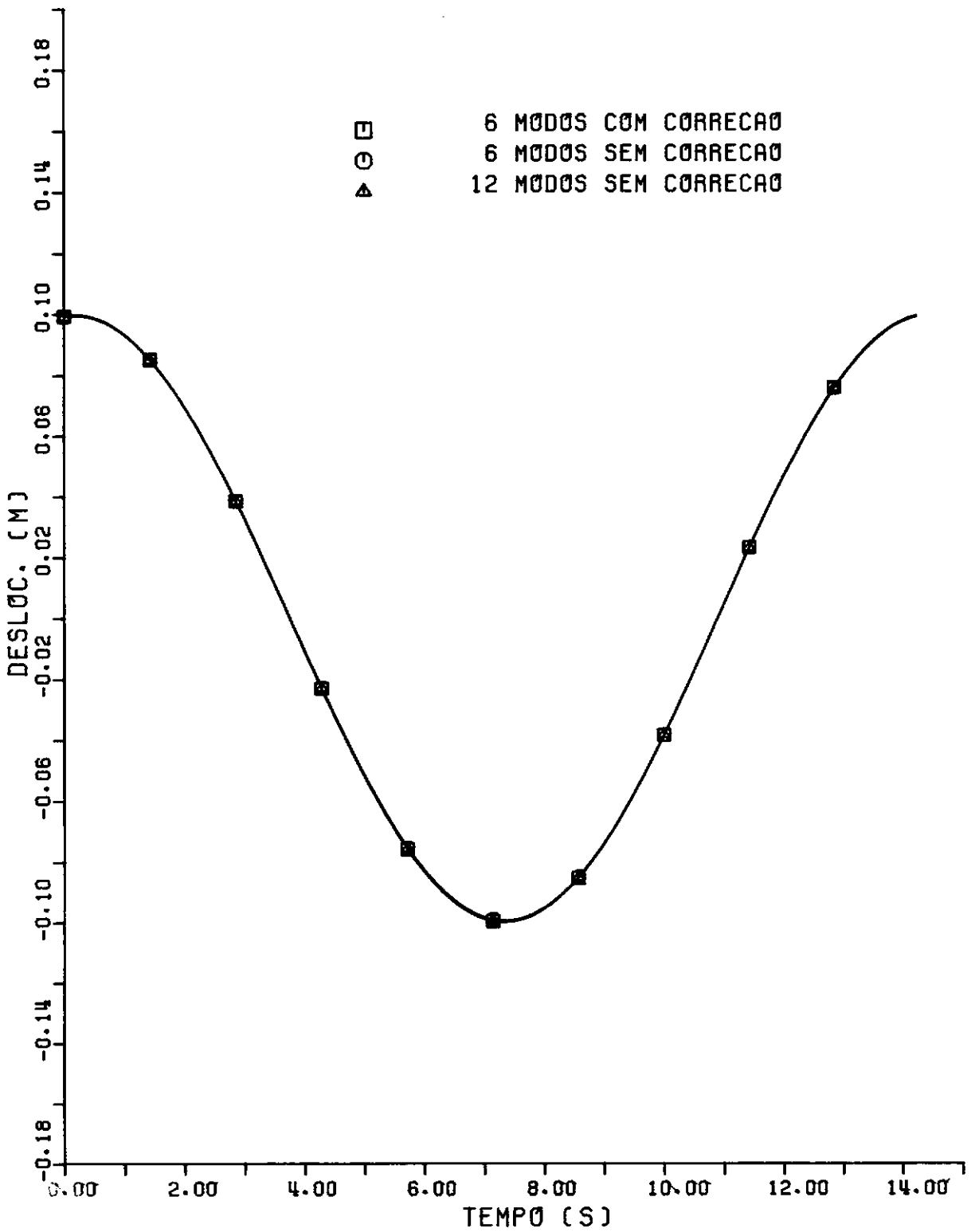


FIGURA VI.11 - DESLOCAMENTO DIR.X - Nº 1

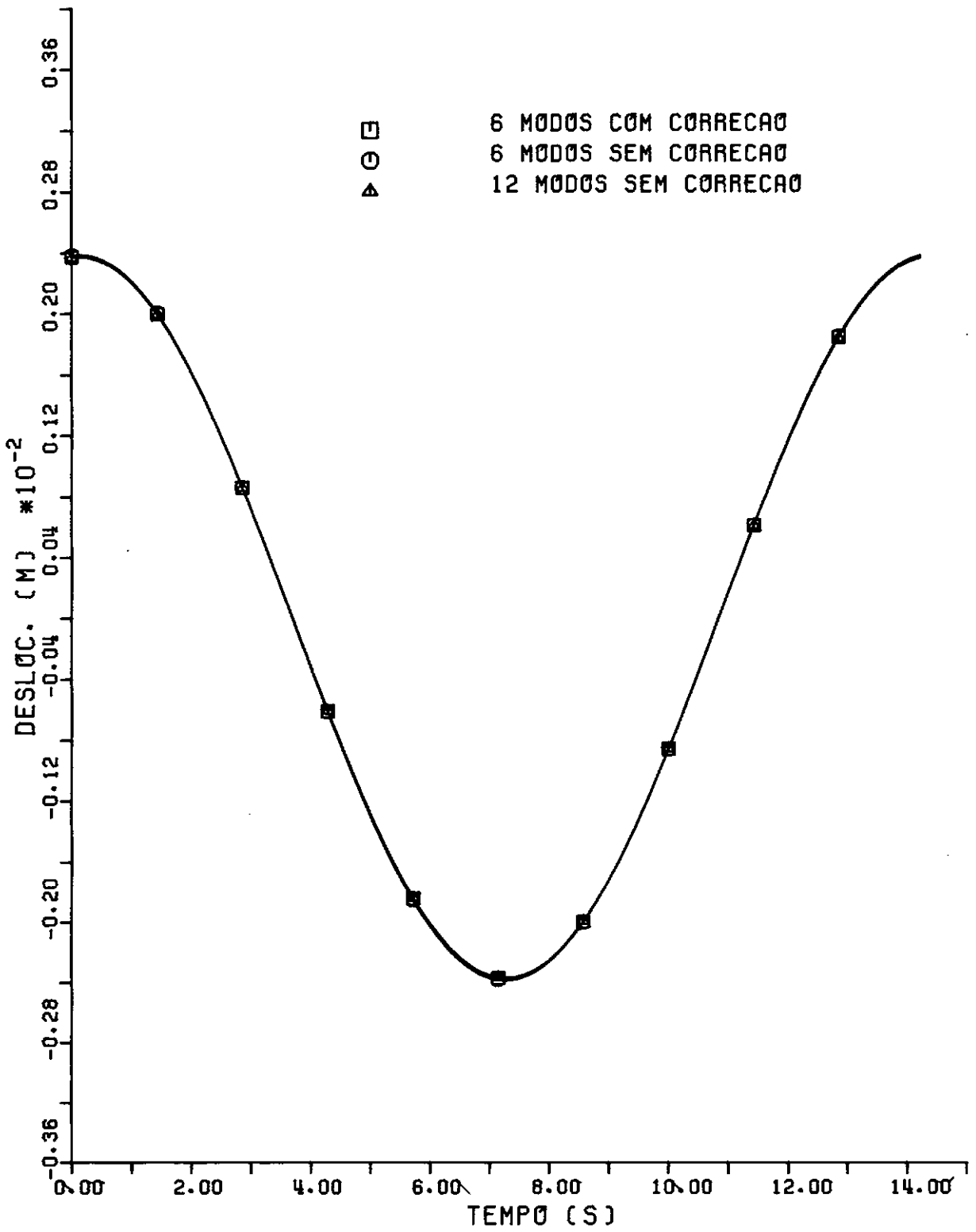


FIGURA VI.12 - DESLOCAMENTO DIR. Y - Nº 1

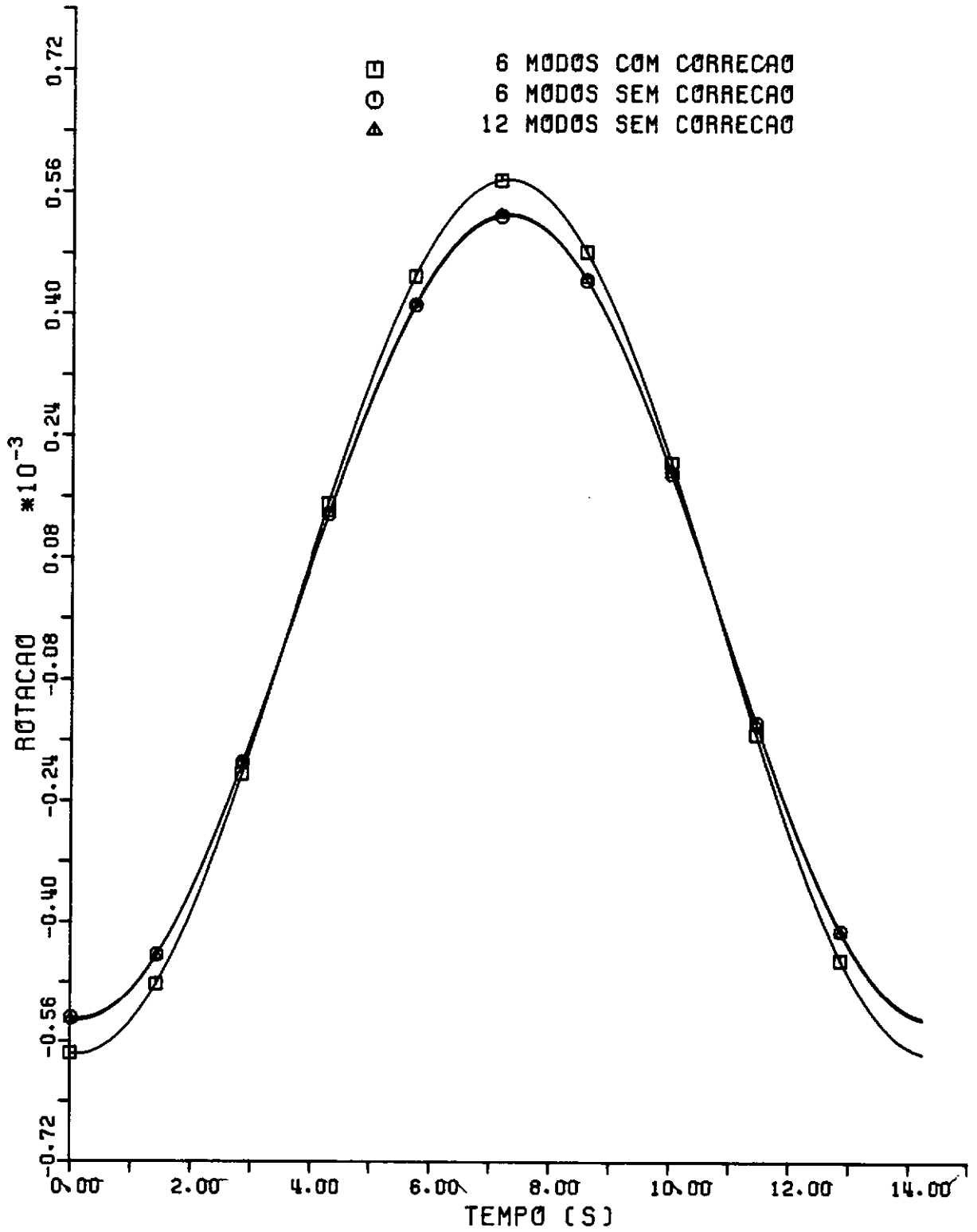


FIGURA VI.13 - ROTACAO RZ - Nº 1

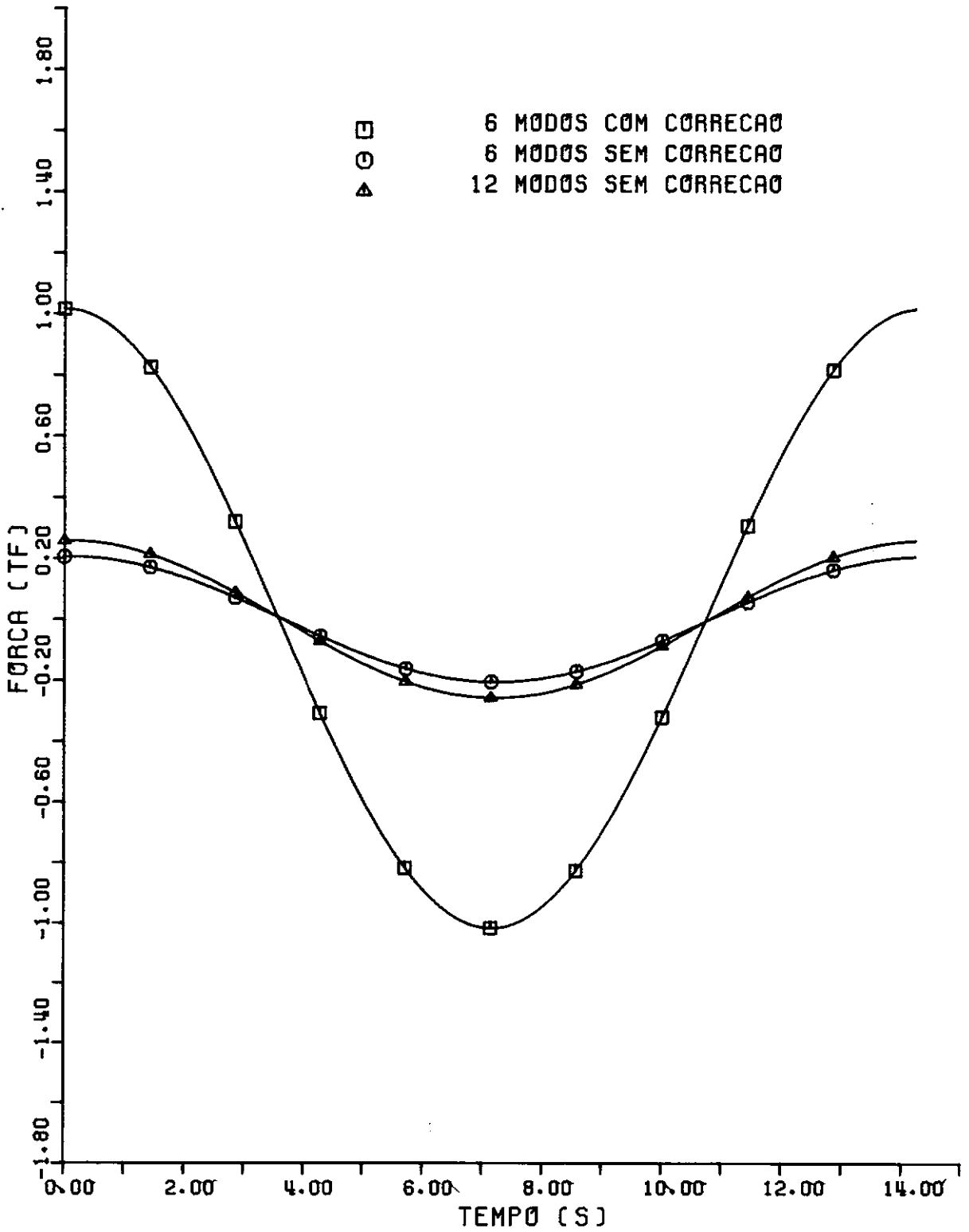


FIGURA VI.14 - ESFORÇO AXIAL - BARRA 1

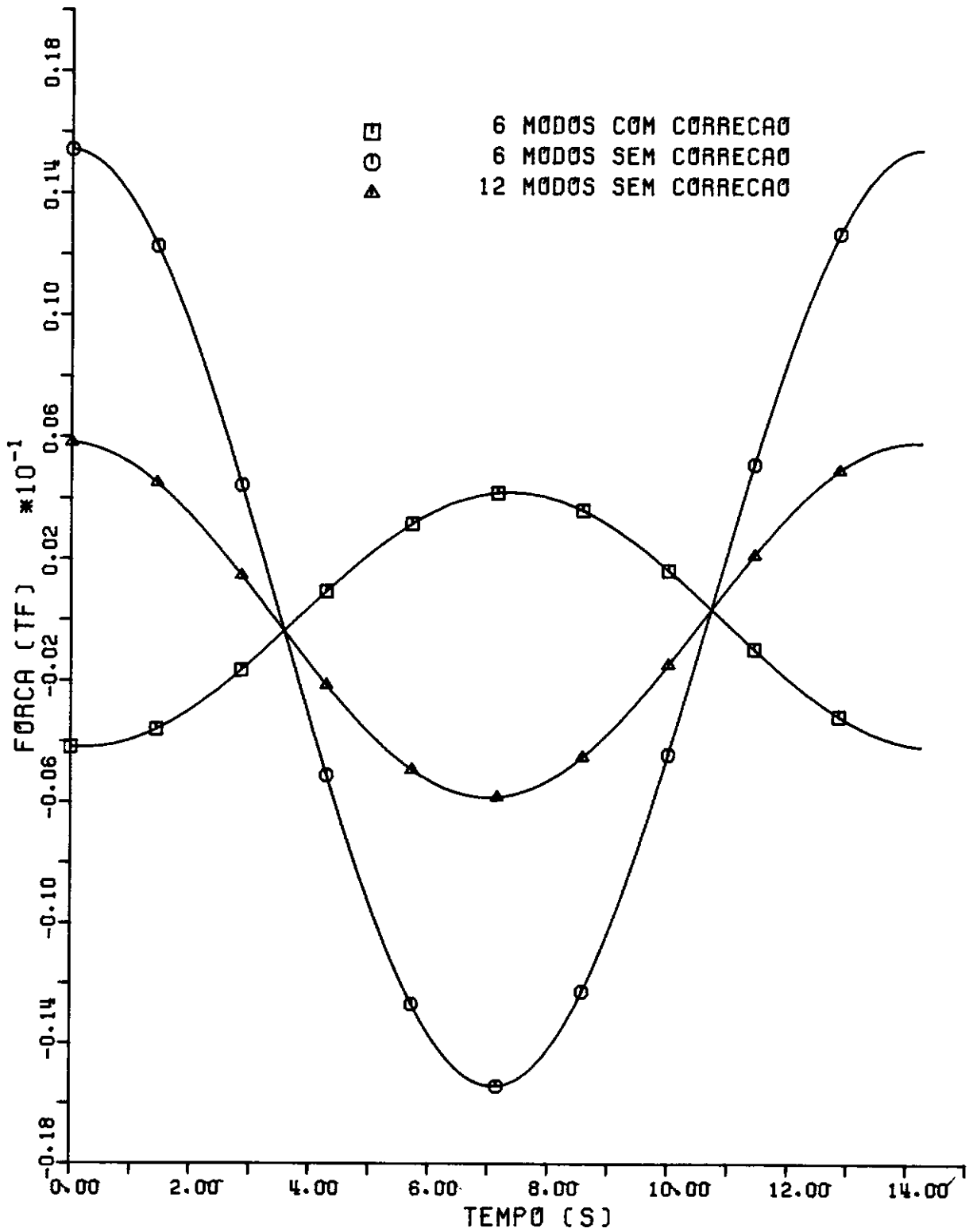


FIGURA VI.15 - ESFORÇO AXIAL - BARRA 9

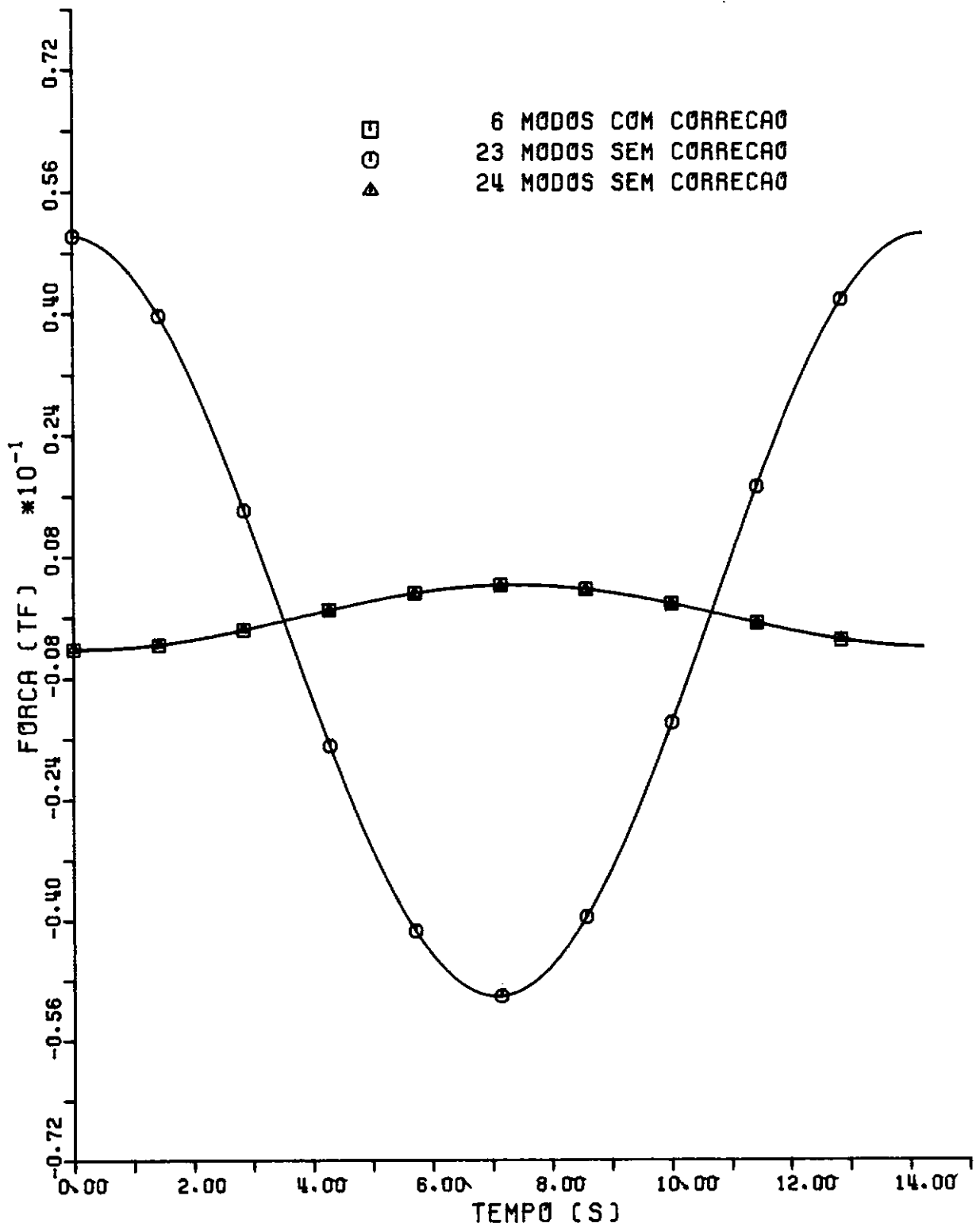


FIGURA VI.16 - ESFORÇO AXIAL - BARRA 9

VI.4 - EXEMPLO 3

Trata-se do pórtico plano da figura VI.17, com posto de 15 nós e 28 elementos, com 36 graus de liberdade. As propriedades físicas e geométricas dos elementos encontram-se nas tabelas VI.1 e VI.2. O carregamento permanente é o mesmo dos exemplos anteriores, indicado na tabela VI.3, sendo o amortecimento da estrutura de 1.9%.

As seis primeiras frequências naturais e períodos estão na tabela VI.13, verificando-se que a relação entre a frequência de excitação e a primeira frequência natural é $\frac{f}{f_1} = 0.14$.

As tabelas VI.14 a VI.17 apresentam as diferenças percentuais das amplitudes máximas de deslocamentos e esforços obtidos através do Método de Superposição Modal e do Método Direto, de acordo com a equação VI.1.

As figuras VI.18 a VI.22 são os gráficos, no steady-state, dos deslocamentos e esforços, utilizando-se 6 modos de vibração com e sem correção estática.

Analisando-se os resultados, verifica-se que os deslocamentos convergem com poucos modos sem correção, e que os esforços apresentam grandes diferenças, principalmente os esforços axiais. Também neste exemplo fica claro que aumentar o número de modos de vibração pode melhorar a solução, como no caso dos esforços axiais das barras 4 e 7 (tabela VI.15), ou dos momentos na barra 2 (tabela VI.17), nada alterar ou até mesmo piorar, conforme os esforços axiais das barras 8 e 9. Na figura VI.22 ve-

rifica-se que a utilização do Método Modal, sem correção, pode levar a resultados errados em amplitude e fase.

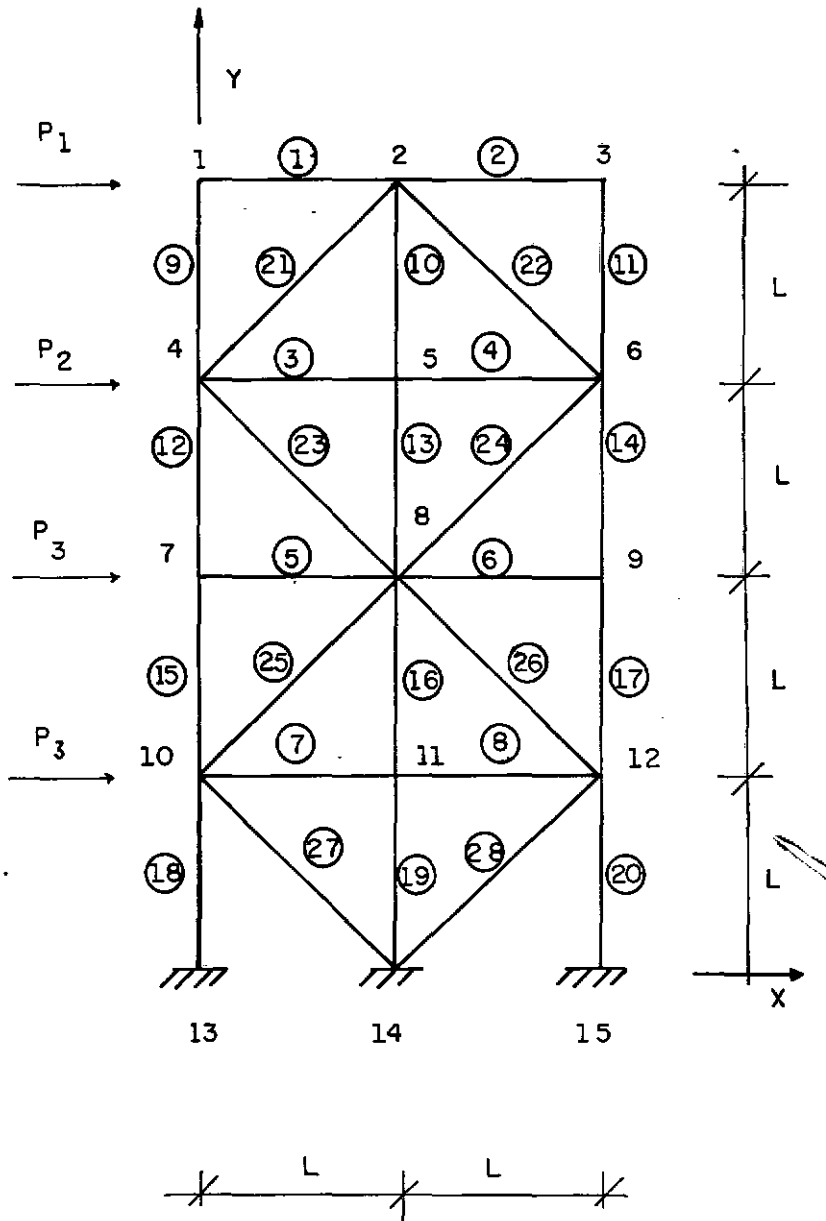


FIGURA VI. 17 - Modelo de pórtico plano

MODOS	PERÍODOS(s)	FREQÜÊNCIA(HERTZ)
1	1.98	0.505
2	0.63	1.578
3	0.57	1.759
4	0.33	3.052
5	0.27	3.677
6	0.26	3.890

TABELA VI.13 - Freqüências naturais e períodos

Nº	DIREÇÃO	6 MODOS SEM CORREÇÃO	12 MODOS SEM CORREÇÃO	6 MODOS COM CORREÇÃO
1	X	2.48	2.47	0.00
	Y	0.06	0.70	0.00
	RZ	4.25	7.22	0.00

TABELA VI.14 - Diferenças percentuais entre o Método
Direto e o Método de Superposição
Modal para deslocamentos nodais

BARRA	6 MODOS SEM CORREÇÃO	12 MODOS SEM CORREÇÃO	6 MODOS COM CORREÇÃO
1	76.24	76.11	0.01
2	32 878.41	32 950.69	12.87
3	80.79	40.76	0.02
4	75.72	3.23	0.01
5	67.39	26.01	0.02
6	378.41	166.81	0.04
7	88.12	11.80	0.01
8	36.36	114.80	0.02
9	109.13	689.93	0.30
10	90.38	53.28	0.05
11	459.66	62.96	0.62
13	79.90	40.92	0.06
16	887.92	33.31	0.27
19	1 039.32	1 521.61	1.62

TABELA VI.15 - Diferenças percentuais entre o Método Direto e o Método de Superposição Modal para esforços axiais nas barras

BARRA	6 MODOS SEM CORREÇÃO	12 MODOS SEM CORREÇÃO	6 MODOS COM CORREÇÃO
2	32.63	16.46	0.01
9	29.37	32.62	0.00
21	58.83	28.67	0.01

TABELA VI.16 - Diferenças percentuais entre o Método Direto e o Método de Superposição Modal para esforços cortantes nas barras

BARRA	Nº	6 MODOS SEM CORREÇÃO	12 MODOS SEM CORREÇÃO	6 MODOS SEM CORREÇÃO
2	2	43.54	27.37	0.01
9	4	35.76	43.39	0.00
21	2	66.70	49.04	0.03
	4	42.29	24.14	0.01
22	2	69.73	9.36	0.02
	6	68.98	13.65	0.02

TABELA VI.17 - Diferenças percentuais entre o Método Direto e o Método de Superposição Modal para momentos nas barras

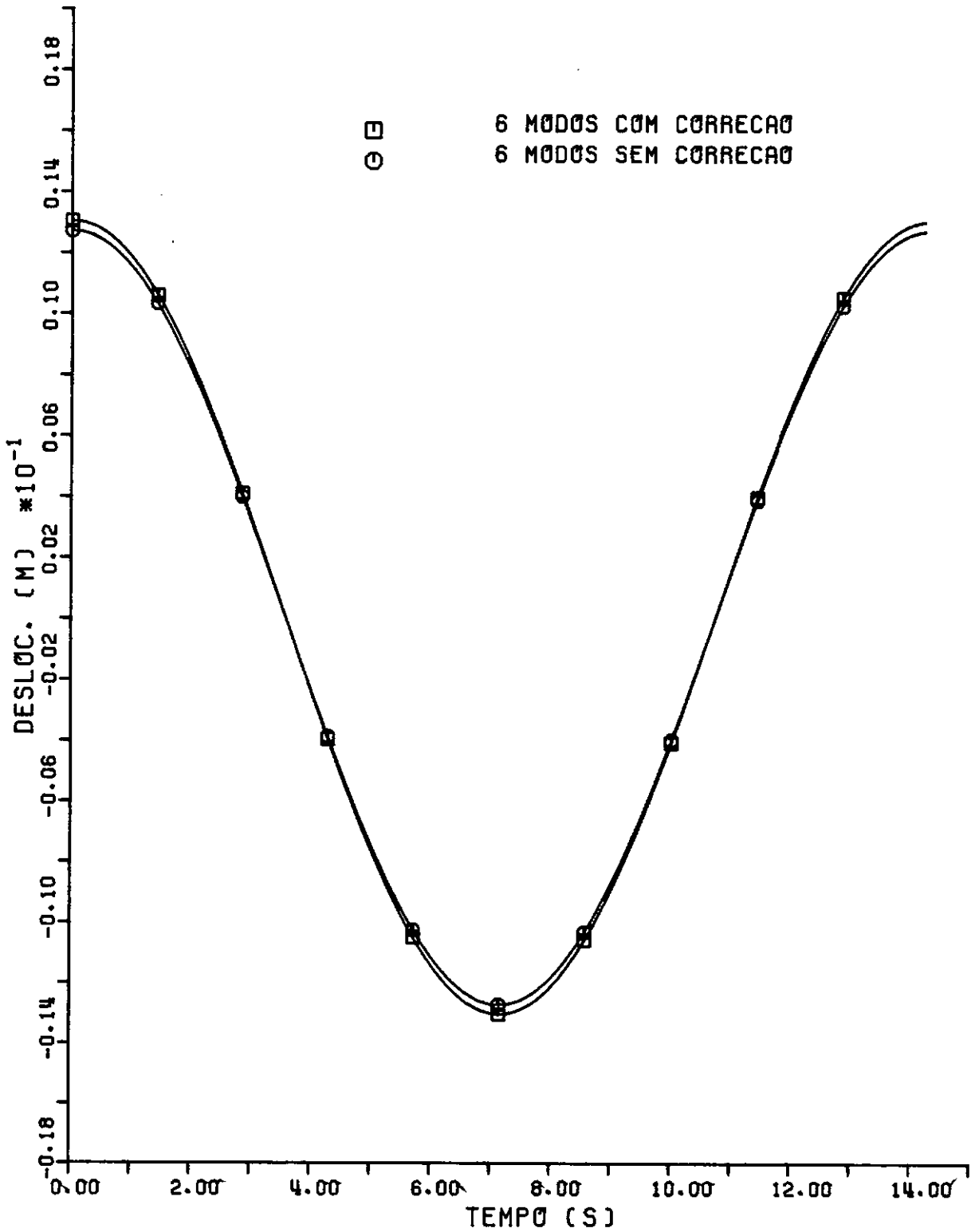


FIGURA VI.18 - DESLOCAMENTO DIR. X - Nº 1

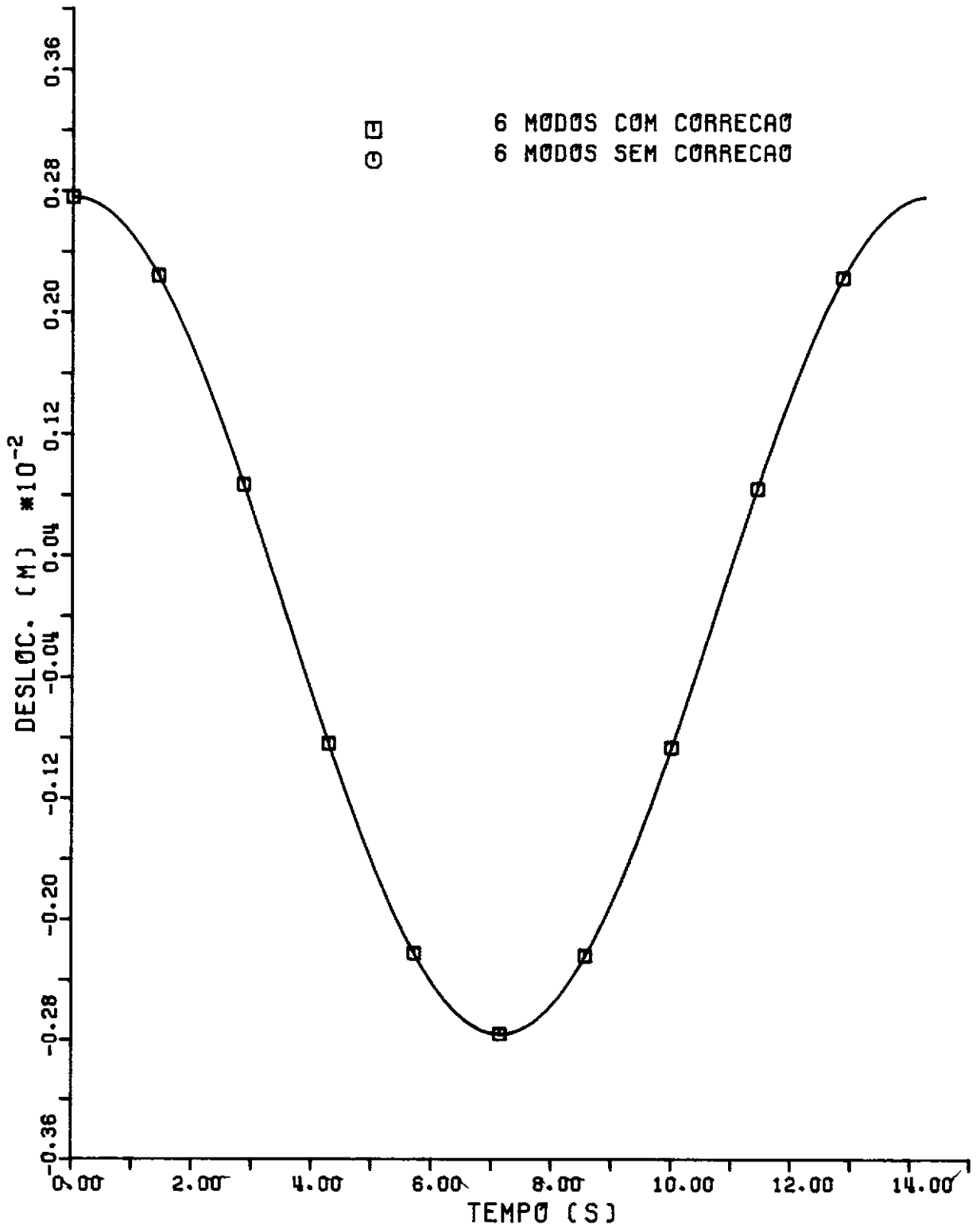


FIGURA VI.19 - DESLOCAMENTO DIR. Y - Nº 1

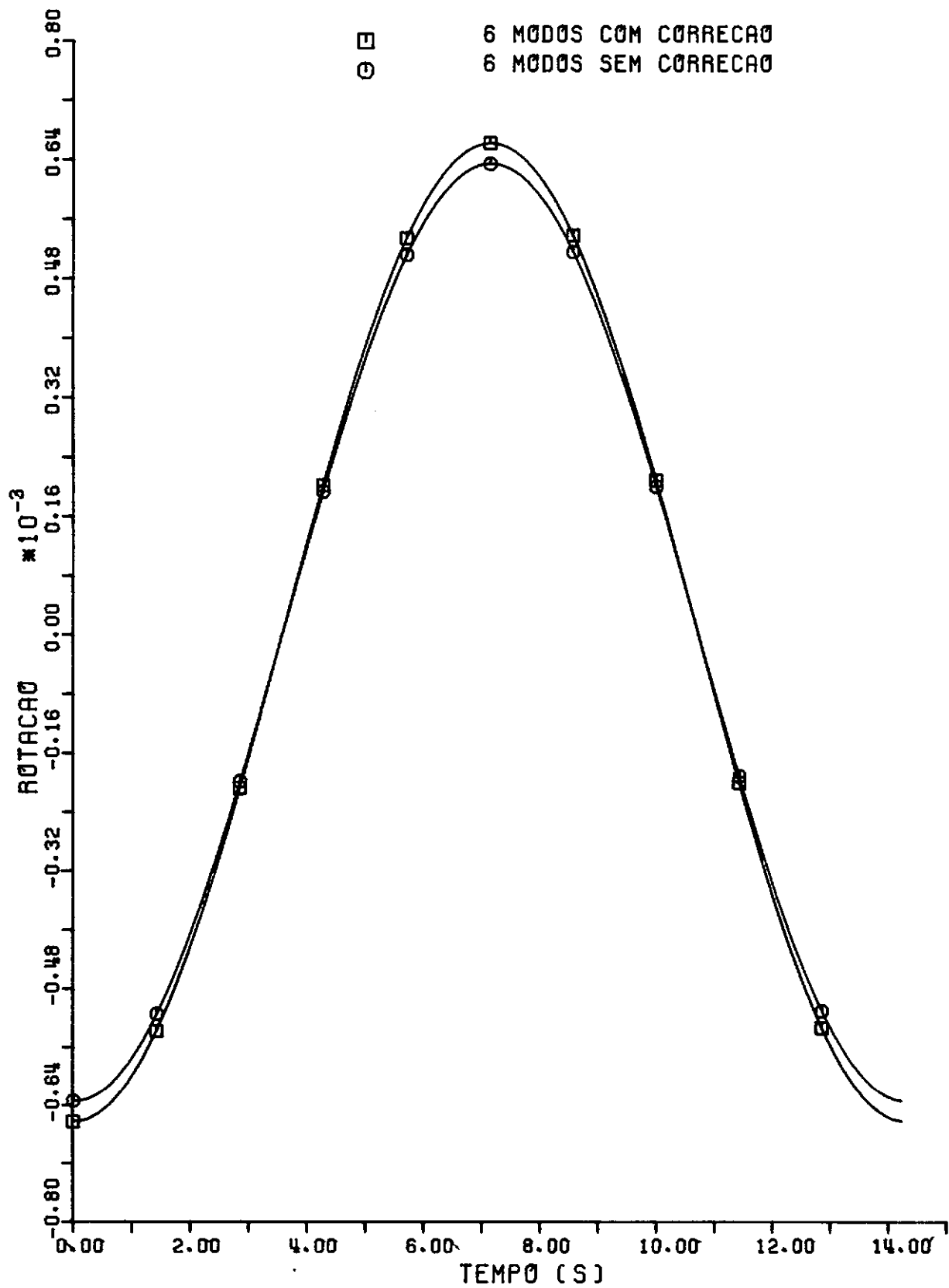


FIGURA VI.20 - ROTACAO RZ - Nº 1

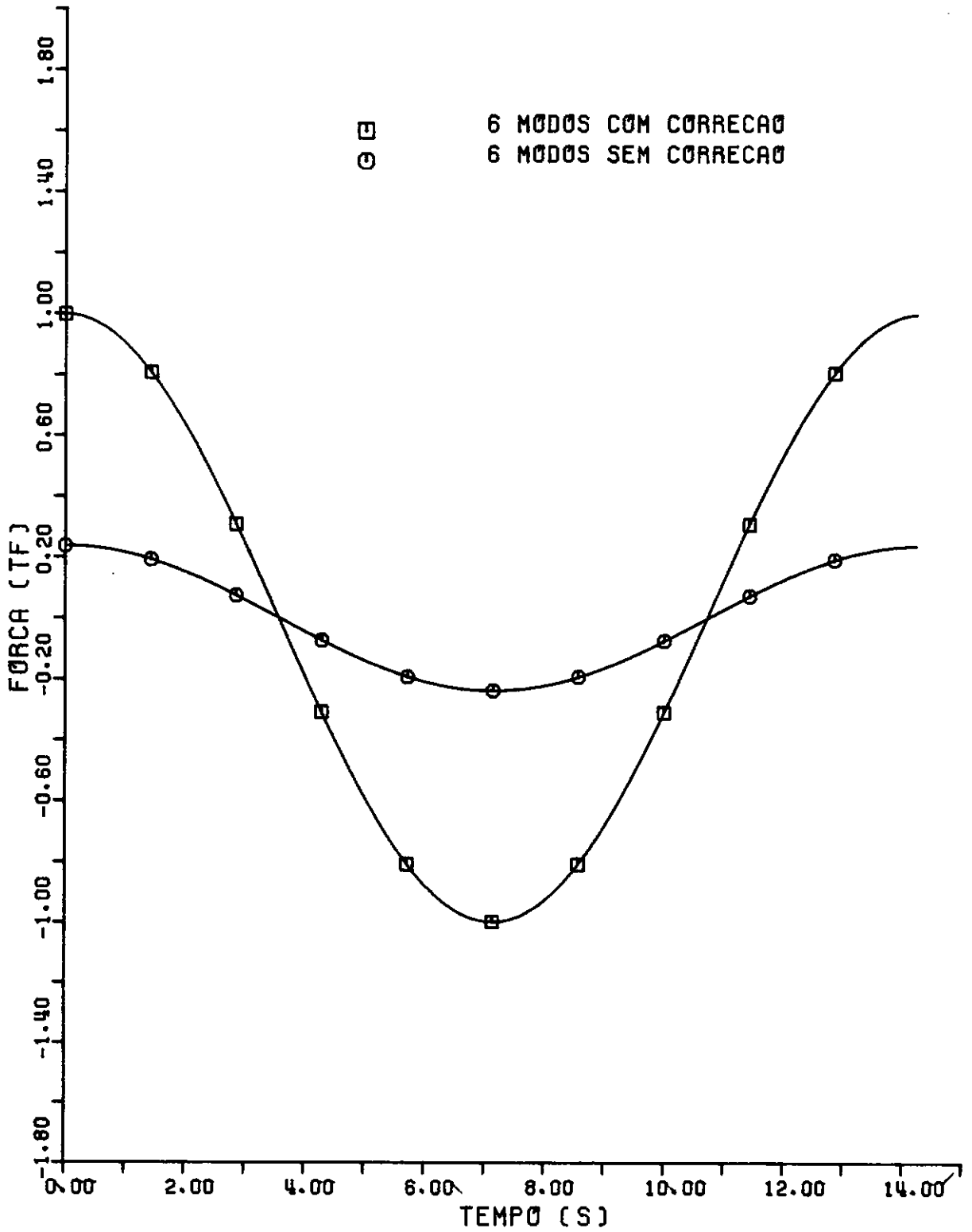


FIGURA VI.21 - ESFORÇO AXIAL - BARRA 1

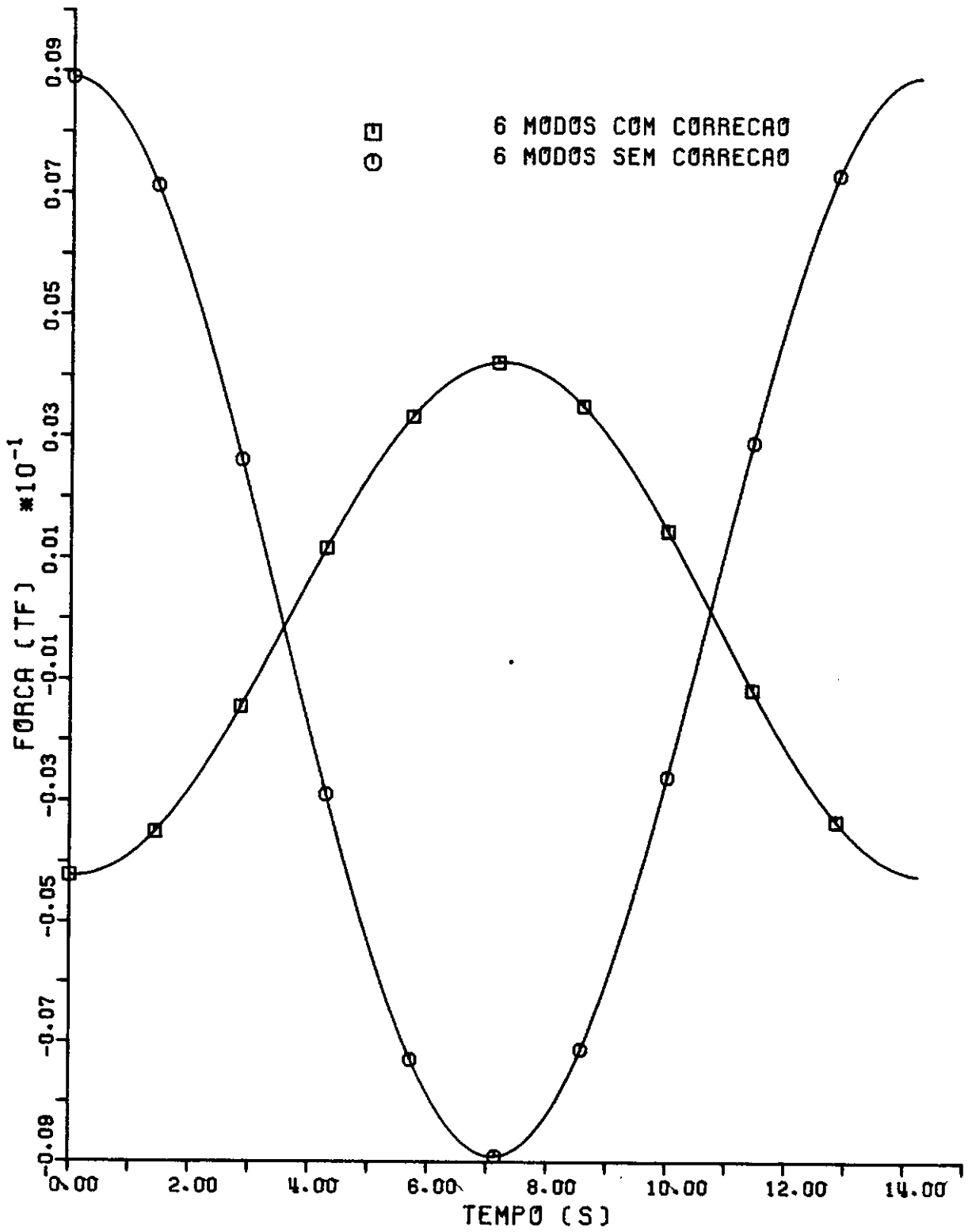


FIGURA VI.22 - ESFORÇO AXIAL - BARRA 9

VI.5 - EXEMPLO 4

Este exemplo se constitui numa viga isostática indicada na figura VI.23, discretizada em 11 nós e 10 elementos, com 30 graus de liberdade. As propriedades físicas e geométricas encontram-se nas tabelas VI.18 e VI.19. O carregamento dinâmico se constitui de cargas iguais aplicadas em todos os nós, de acordo com a tabela VI.20, e o amortecimento é de 3% do amortecimento crítico.

As seis primeiras frequências naturais e períodos estão indicados na tabela VI.21, sendo que a relação entre a frequência de excitação e a primeira frequência natural é:

$$\frac{f}{f_1} = 0.20.$$

Na tabela VI.22 encontram-se as diferenças percentuais das amplitudes máximas de esforços cortantes utilizando-se o Método de Superposição Modal e o Método Direto, de acordo com a equação VI.1, para as barras 1 e 5. Verifica-se a rápida convergência dos resultados, utilizando-se poucos modos sem correção, pois neste caso, os primeiros modos da estrutura são modos de flexão, sendo que a transformação de coordenadas, utilizando apenas o primeiro modo, é capaz de representar o carregamento.

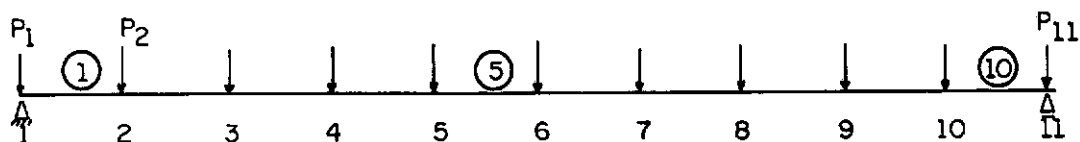


FIGURA VI.23 _ Modelo de viga isostática

Área de seção transversal	(Ax)	1.00 m ²
Momento de inércia	(Iz)	0.01 m ⁴
Comprimento dos elementos	(L)	1.00 m

TABELA VI.18 - Características geométricas dos elementos

Módulo de elasticidade	(E)	10 ⁴ tf/m ²
Coefficiente de Poisson	(ν)	0
Densidade	(ρ)	0.2 $\frac{\text{tf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^4}$

TABELA VI.19 - Características físicas do material

CARGA	MÓDULO(tf)	FASE	FREQÜÊNCIA(HERTZ)
P ₁ a P ₁₁	1.0	0	0.07

TABELA VI.20 - Dados do carregamento dinâmico

MODOS	PERÍODOS(s)	FREQÜÊNCIA(HERTZ)
1	2.847	0.357
2	0.712	1.405
3	0.317	3.159
4	0.179	5.584
5	0.178	5.606
6	0.115	8.717

TABELA VI.21 - Freqüências naturais e períodos

BARRA	6 MODOS SEM CORREÇÃO	8 MODOS SEM CORREÇÃO	10 MODOS SEM CORREÇÃO	12 MODOS SEM CORREÇÃO	18 MODOS SEM CORREÇÃO	6 MODOS COM CORREÇÃO
1	0.61	0.06	0.06	0.00	0.00	0.00
5	6.67	3.02	3.01	0.00	0.00	0.00

TABELA VI.22 - Diferenças percentuais entre o Método Direto e o Método de Superposição Modal para esforços axiais nas barras

VI.6 - EXEMPLO 5

Neste exemplo serão apresentados resultados obtidos da análise da 6ª configuração da plataforma auto-elevatória AE-48, para profundidade de 100 m de lâmina d'água, cujo projeto está sendo desenvolvido pela PETROBRÁS S.A. e COPPE. Utilizou-se o modelo simplificado de rigidez equivalente, de acordo com a referência (61), discretizando-se a estrutura através de elementos de pórtico, conforme indicado na figura VI.24. O casco foi discretizado através de elementos de rigidez alta, sendo ligado às pernas da plataforma através de molas lineares. O apoio das pernas nas sapatas é representado por engaste que impede translação em X, Y e Z. A malha se compõe de 90 nós e 96 elementos, possuindo o modelo 531 graus de liberdade. As coordenadas dos nós, bem como propriedades e outros dados foram retirados da referência (61).

As dez primeiras frequências naturais e períodos estão na tabela VI.23. O primeiro e segundo modos de vibração são modos de flexão, e o terceiro é um modo de torção em torno do eixo Z, todos modos globais. A partir do quarto surgem modos locais de vibração.

Foi analisado o caso em que o carregamento aplicado é resultante da ação de uma onda ressonante, de período 9.301 seg e altura 9.29 m, adotando-se amortecimento de 4%. Essa onda atua com valor máximo na face paralela ao plano YZ, atingindo o valor máximo, na outra perna, com um atraso representado por uma defasagem de -1.9354 rad. Na figura VI.25 está representado o deslocamento na direção global X do nó 82, devido aos dois carregamentos defasados e sua resultante. A atuação deste carre-

gamento foi representada através de cargas horizontais nodais, aplicadas na direção X, nos nós submersos da estrutura, obtidas através de análise do programa STRUDL (55).

As relações entre a frequência de excitação e as quatro primeiras frequências naturais são as seguintes.

$$\frac{f}{\bar{f}_1} = \frac{f}{\bar{f}_2} = \frac{f}{\bar{f}_3} \approx 1 \quad \text{e} \quad \frac{f}{\bar{f}_4} = 0.06$$

Na tabela VI.24 são apresentados o deslocamento do nó 82, situado no topo da estrutura, e a reação vertical na barra vertical, utilizando-se o Método de Superposição Modal com 1 e 2 modos sem correção e 1 e 6 modos com correção.

Verifica-se, através da tabela VI.24 e dos gráficos das figuras VI.26 a VI.29, que os dois primeiros modos de vibração são suficientes para uma conveniente representação do carregamento atuante.

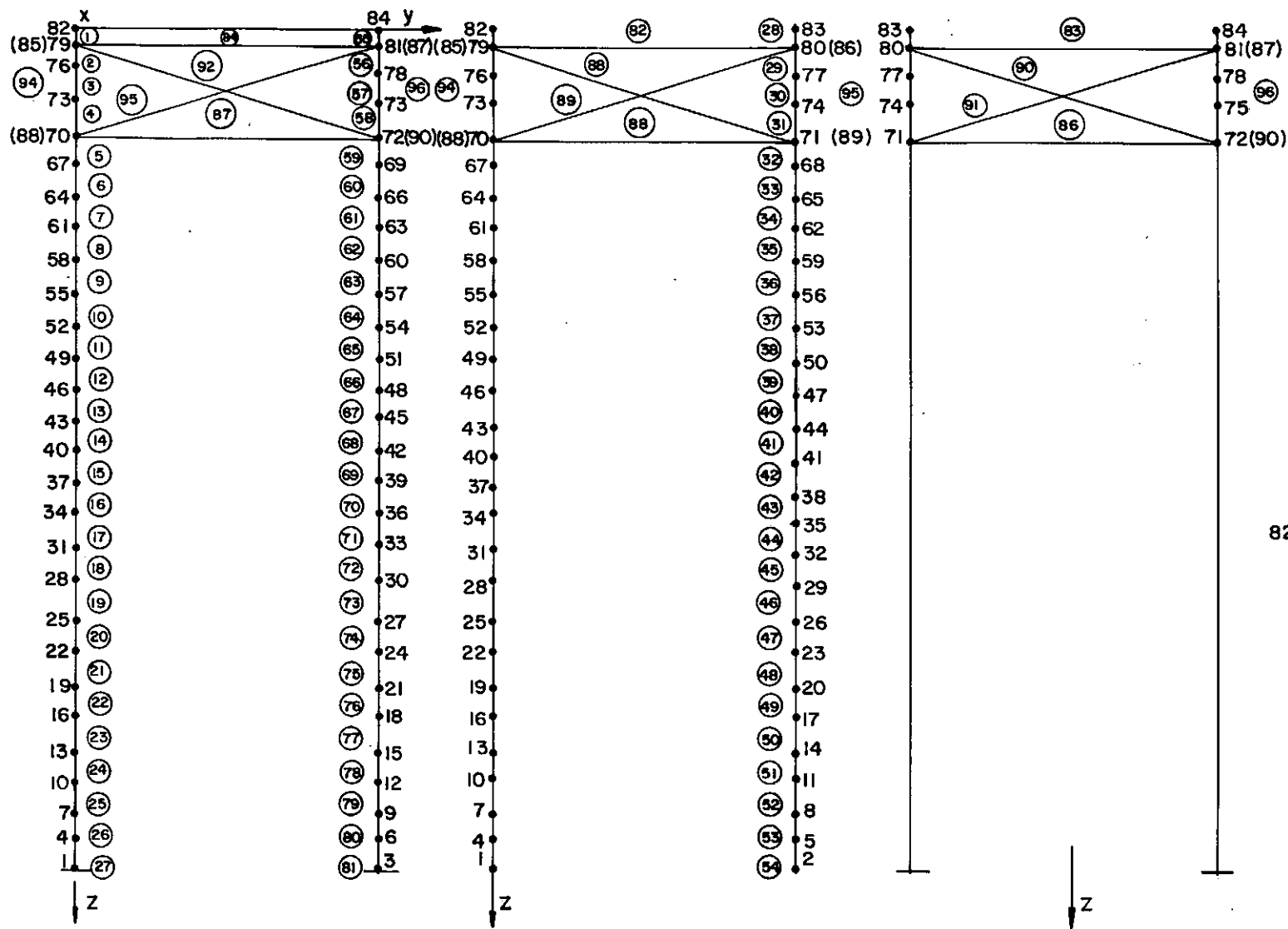


FIGURA VII.24_ Malha da AE-48_modelo simplificado

MODOS	PERÍODOS (s)	FREQÜÊNCIA (HERTZ)
1	9.295	0.108
2	9.295	0.108
3	8.981	0.111
4	0.565	1.770
5	0.565	1.770
6	0.565	1.772
7	0.565	1.772
8	0.565	1.772
9	0.547	1.829
10	0.380	2.634

TABELA VI.23 - Freqüências naturais e períodos

	DESLOCAMENTO DIR. X Nº 82 (m)	REAÇÃO VERTICAL BARRA 54 (tf)
1 modo sem correção	1.396	1838.9
2 modos sem correção	2.792	3677.7
1 modo com correção	1.405	1847.6
6 modos com correção	2.792	3678.8

TABELA VI.24 - Resultados de deslocamento do topo e
reação vertical

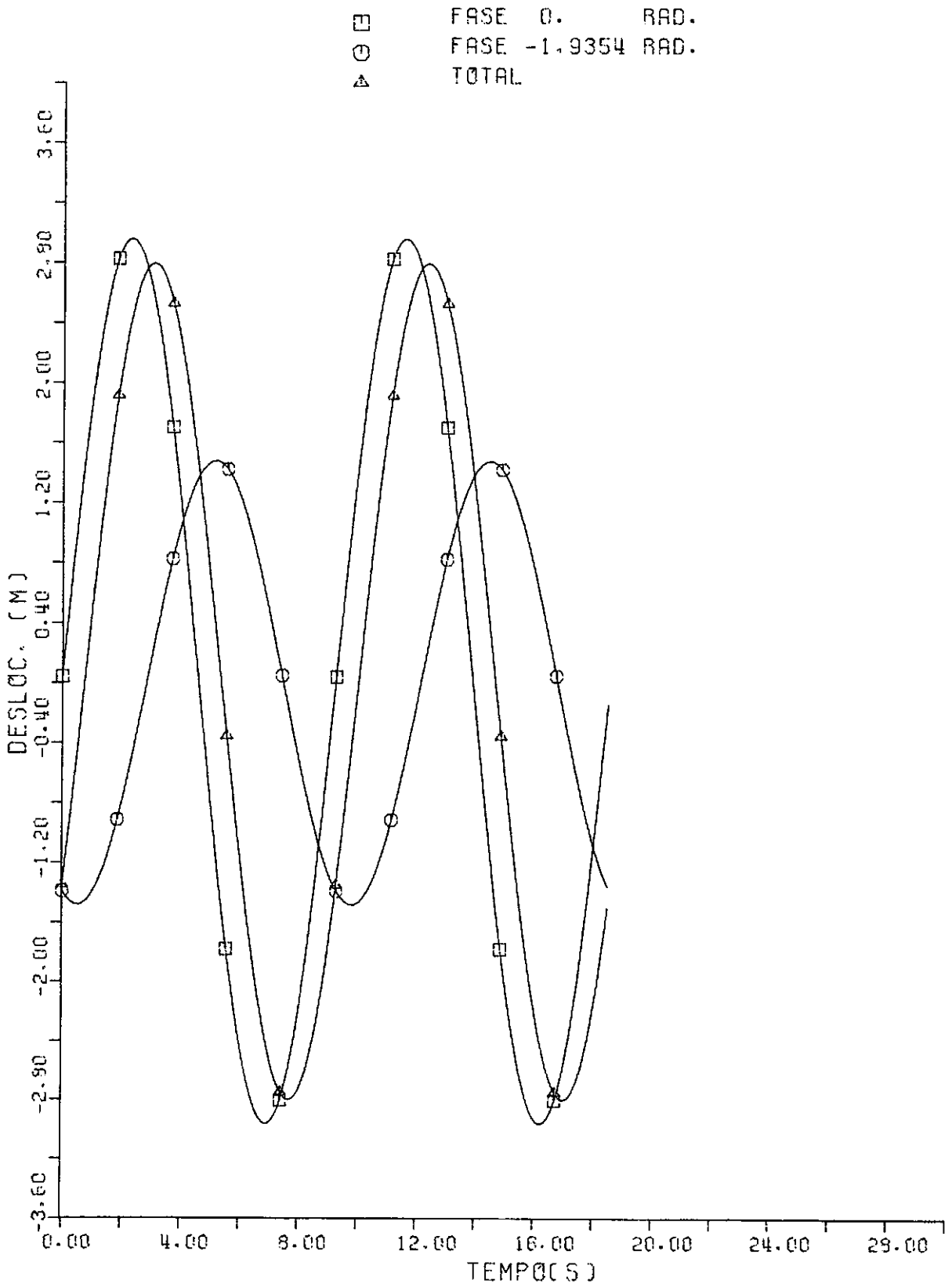


FIGURA VI.25 - DESLOCAMENTO DIR. X - Nº 82

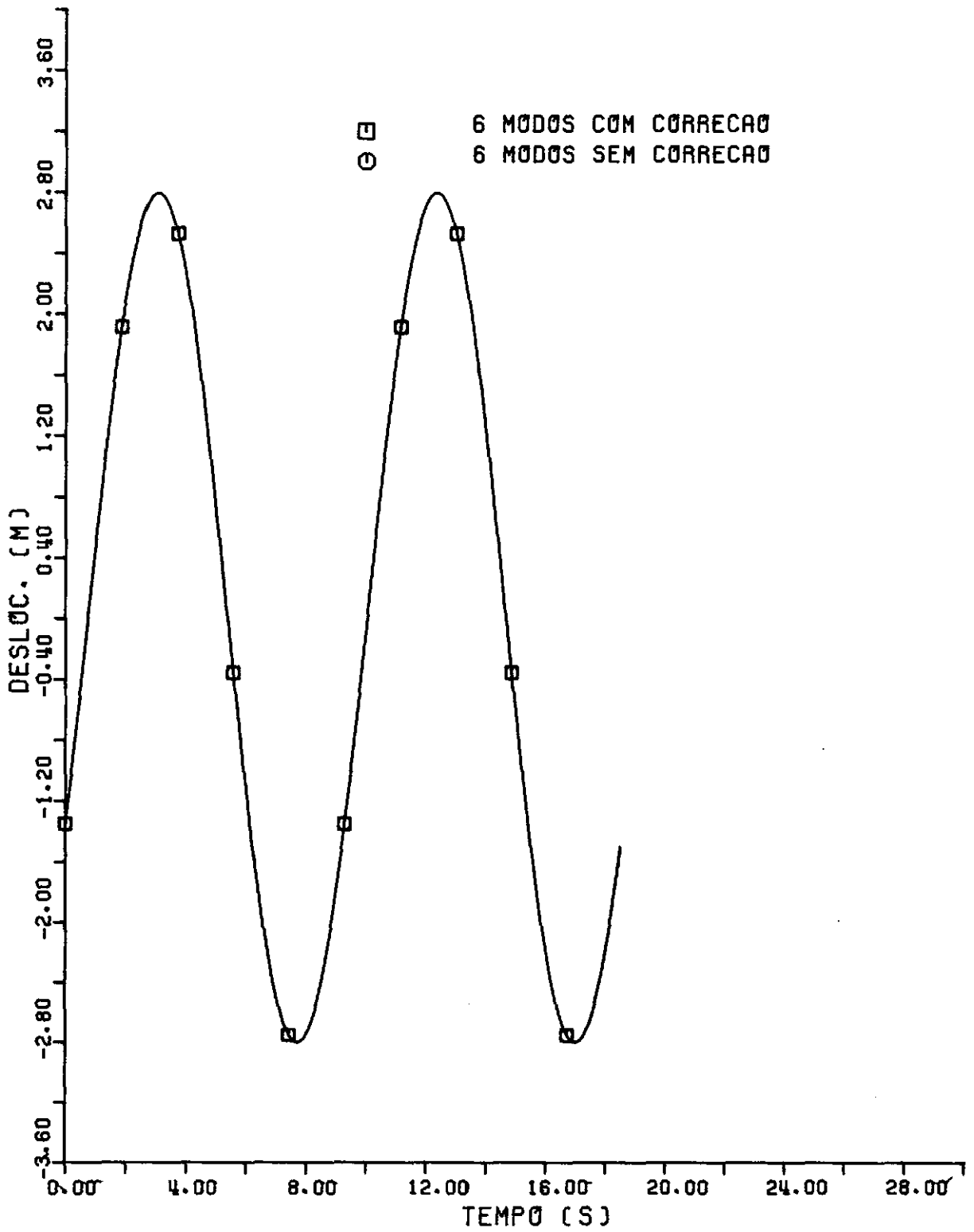


FIGURA VI.26 - DESLOCAMENTO DIR. X - Nº 82

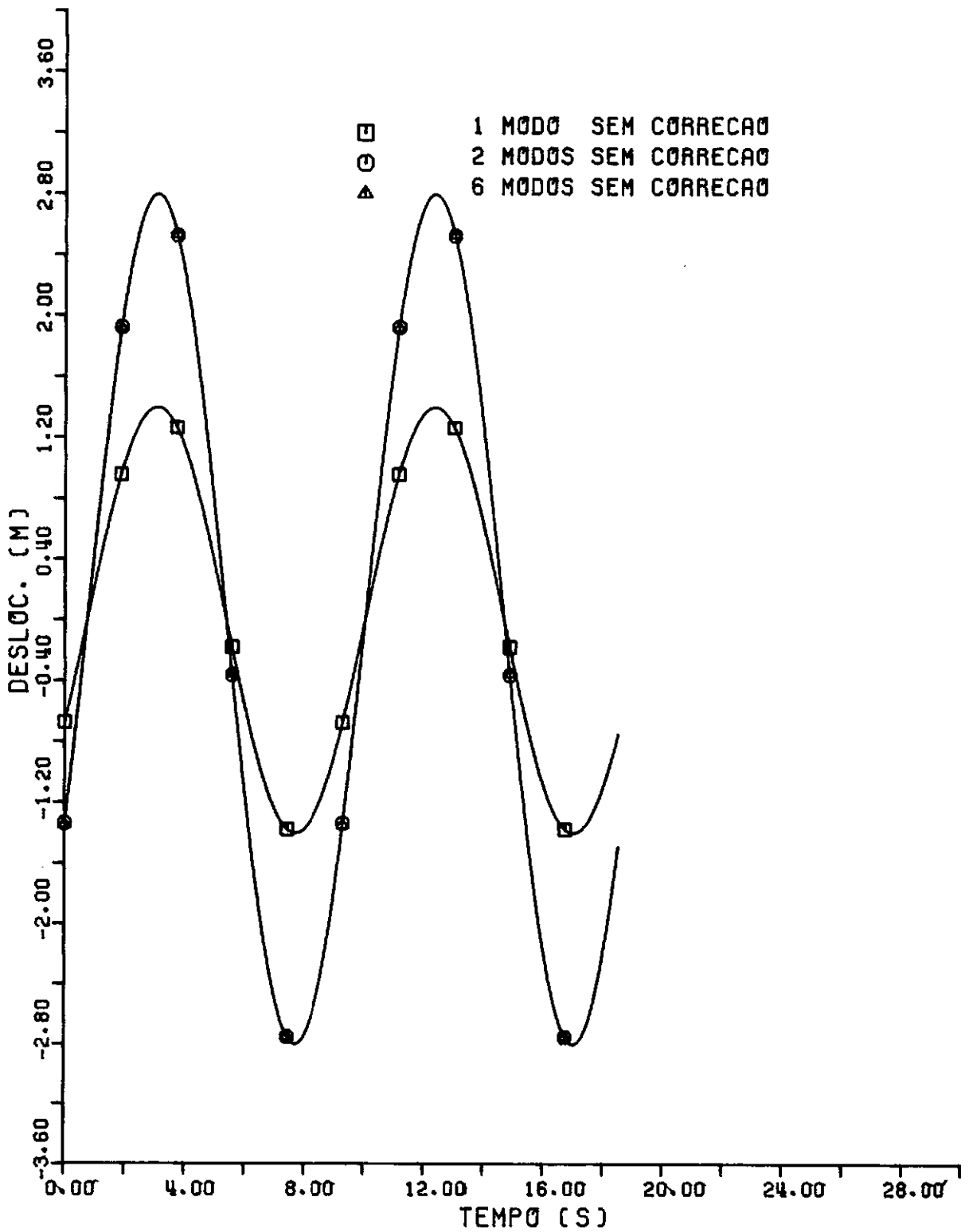


FIGURA VI.27 - DESLOCAMENTO DIR. X - Nº 82

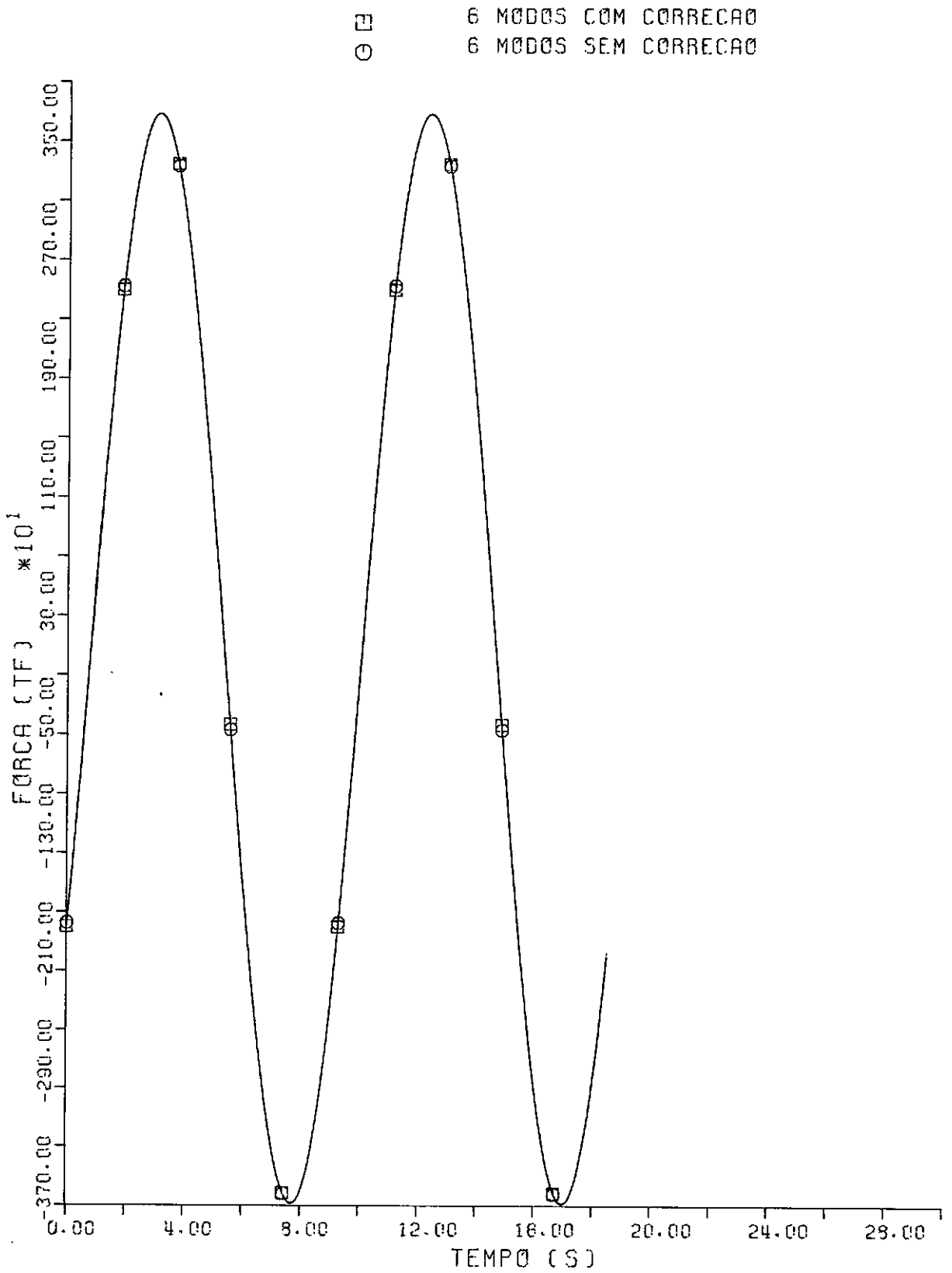


FIGURA VI.28 - REACAO NORMAL - BARRA 54

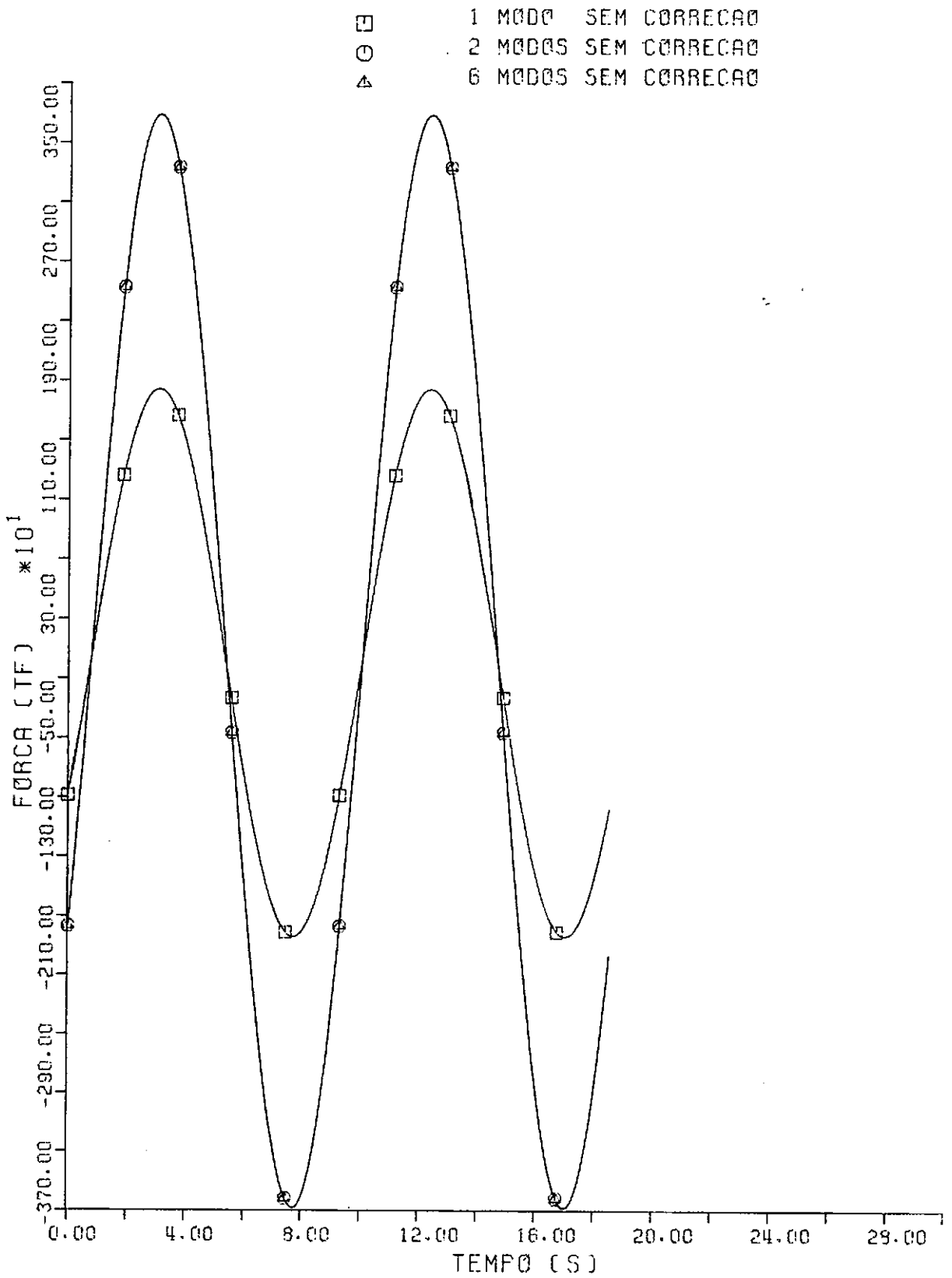


FIGURA VI.29 - REACAO NORMAL - BARRA 54

VI.7 - EXEMPLO 6

A estrutura analisada é o pórtico plano da figura VI.30, composto de 17 nós e 22 elementos, com 42 graus de liberdade. As propriedades físicas e geométricas dos elementos encontram-se nas tabelas VI.1 e VI.2.

O carregamento dinâmico é do tipo permanente, com frequência alta de excitação, conforme indicado na tabela VI.25.

Na tabela VI.26 estão as 28 frequências naturais e períodos da estrutura, sendo as relações entre as frequências de excitação e a última frequência natural dadas por:

$$\frac{f_1}{\bar{f}_{28}} = 2.75 \quad \text{e} \quad \frac{f_2}{\bar{f}_{28}} = 1.83$$

Trata-se, portanto, de um caso de frequência de excitação alta.

Nas tabelas VI.27 e VI.28 são apresentados os resultados de deslocamentos e acelerações nos nós onde são aplicadas as cargas, e na sua direção, para cada carga, separadamente. São comparados os resultados obtidos do LORANE-DINA, considerando a existência de amortecimento, da ordem de 1.6%, e sem amortecimento, e os resultados do programa DINFAD. Verifica-se que os resultados são idênticos, não havendo influencia do amortecimento sobre a resposta.

Para este caso foi utilizada a matriz de massa consistente para elemento de pórtico, segundo Przemieniecki (8).

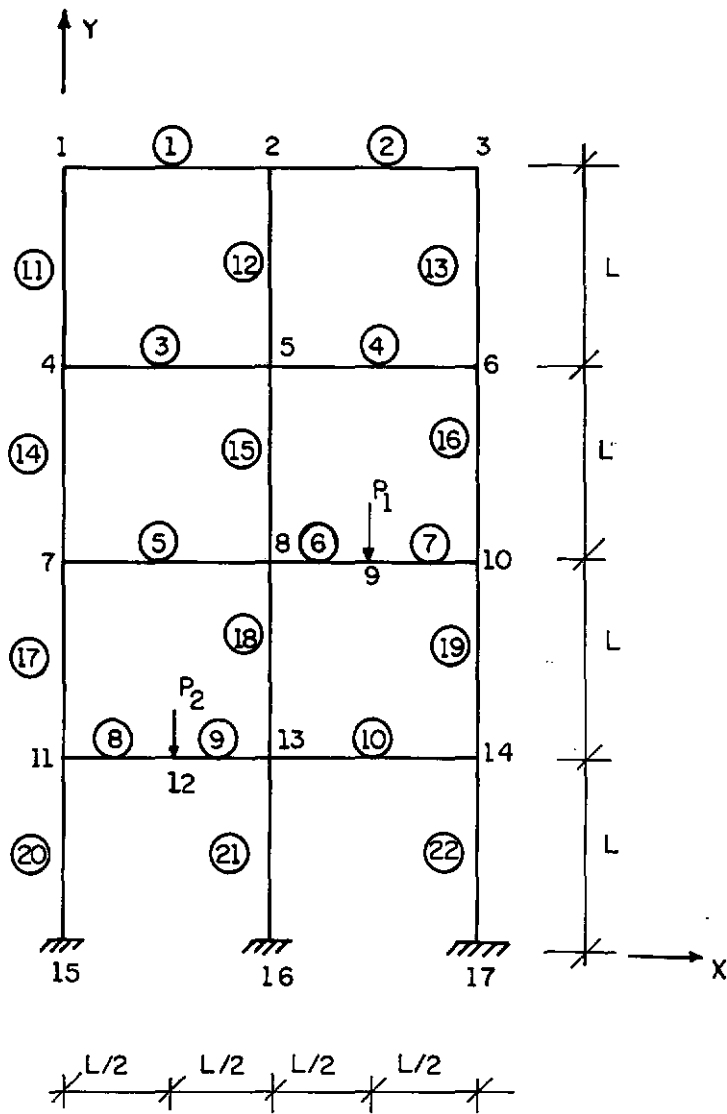


FIGURA VI.30 - Modelo do pórtico plano

CARGA	MÓDULO(tf)	FASE	FREQÜÊNCIA(HERTZ)
P ₁	1.	0.	60.
P ₂	1.	0.	40.

TABELA VI.25 - Dados do carregamento dinâmico

MODOS	PERÍODOS(s)	FREQÜÊNCIA(HERTZ)
1	10.28	0.097
2	3.32	0.301
3	1.95	0.513
4	1.45	0.691
5	0.54	1.848
6	0.47	2.128
7	0.46	2.129
8	0.43	2.307
9	0.41	2.413
10	0.18	5.568
11	0.17	5.829
12	0.17	5.925
13	0.17	5.953
14	0.16	6.377
15	0.16	6.424
16	0.14	7.126
17	0.12	8.221
18	0.11	9.199
19	0.11	9.424
20	0.10	9.691
21	0.10	9.750
22	0.10	9.766
23	0.10	9.980
24	0.09	10.876
25	0.09	11.297
26	0.09	11.538
27	0.05	21.841
28	0.05	21.842

TABELA VI.26 - Frequências naturais e períodos

	DINFAD	LORANE - DINA $\xi=0\%$	LORANE - DINA $\xi=1.6\%$
DESLOCAMENTO Y Nº 9 (m)	1.981×10^{-5}	1.981×10^{-5}	1.981×10^{-5}
ACELERAÇÃO Y Nº 9 (m/s ²)	2.816	2.816	2.816
DESLOCAMENTO Y Nº 12 (m)	1.016×10^{-7}	1.016×10^{-7}	1.016×10^{-7}
ACELERAÇÃO Y Nº 12 (m/s ²)	1.445×10^{-2}	1.445×10^{-2}	1.445×10^{-2}

TABELA VI.27 - Resultados relativos ao carregamento P₁

	DINFAD	LORANE - DINA $\xi=0\%$	LORANE-DINA $\xi=1,6\%$
DESLOCAMENTO Y Nº 9 (m)	2.677×10^{-7}	2.677×10^{-7}	2.677×10^{-7}
ACELERAÇÃO Y Nº 9 (m/s ²)	1.691×10^{-2}	1.691×10^{-2}	1.691×10^{-2}
DESLOCAMENTO Y Nº 12 (m)	4.471×10^{-5}	4.470×10^{-5}	4.470×10^{-5}
ACELERAÇÃO Y Nº 12 (m/s ²)	2.824	2.824	2.824

TABELA VI.28 - Resultados relativos ao carregamento P₂

VI.8 - EXEMPLO 7

Este exemplo se constitui da placa apoiada nos bordos da figura VI.31, discretizada numa malha de elementos RGCP, composta de 25 nós e 16 elementos, com 39 graus de liberdade. Na tabela VI.29 encontram-se as propriedades geométricas e físicas, comuns a todos os elementos.

A estrutura está submetida a carregamento dinâmico permanente, conforme a tabela VI.30, aplicado nos nós 12, 13 e 14 na direção Z.

As nove frequências naturais e períodos estão indicados na tabela VI.31, e a relação entre a frequência de excitação e a última frequência natural é: $\frac{f}{f_9} = 4.5$, tratando-se de um caso de frequência de excitação alta.

Na tabela VI.32 encontram-se resultados de deslocamentos e acelerações na direção Z dos nós 12, 13 e 14. Pode-se avaliar a massa discreta na direção Z desses nós, cujo valor é de 2.3488 t. Este valor da massa, multiplicada pela aceleração do nó, fornece, aproximadamente, o valor da carga aplicada, ou seja, a resposta da estrutura ao carregamento é através das forças de inércia, tratando-se de um fenômeno localizado.

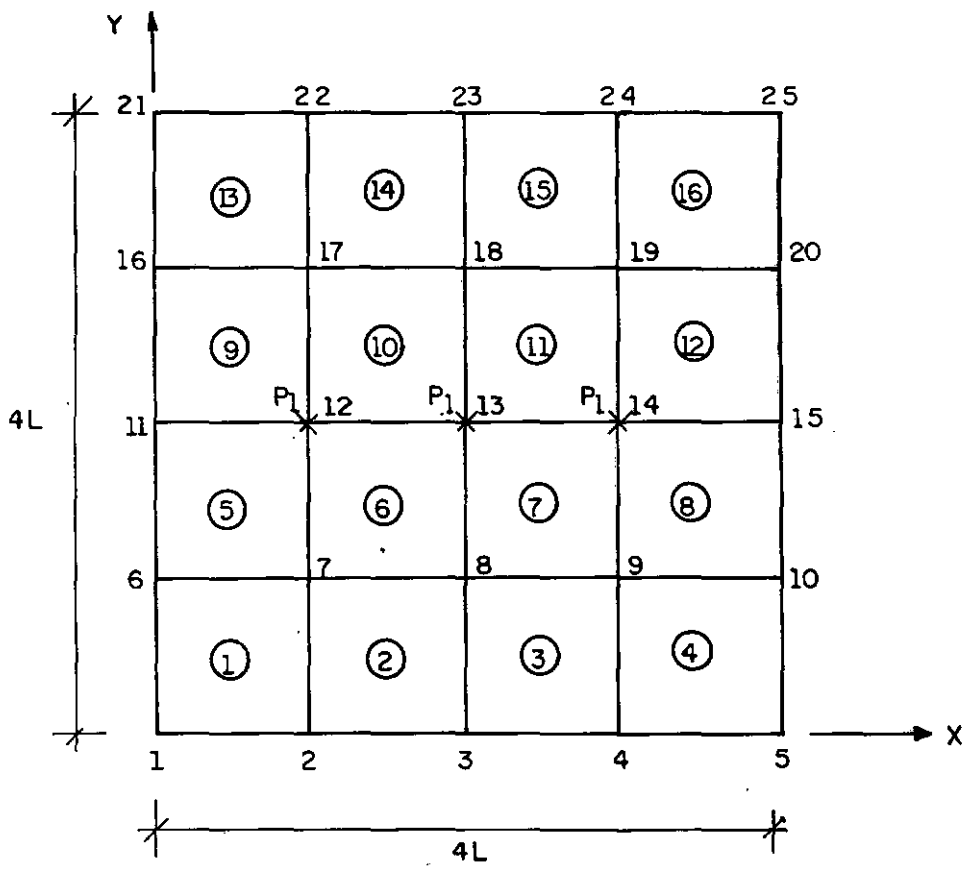


FIGURA VI. 31- Modelo da placa

Espessura	(e)	2.00 m
Comprimento	(L)	40.00 m
Módulo de Elasticidade	(E)	$30 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$
Coeficiente de Poisson	(ν)	0.25
Densidade	(ρ)	$0.000734 \frac{\text{tf.s}^2}{\text{m}^4}$

TABELA VI.29 - Características geométricas e físicas dos elementos

CARGA	MÓDULO (tf)	FASE	FREQUÊNCIA (HERTZ)
P ₁	10.	0.	400.

TABELA VI.30 - Dados do carregamento dinâmico

MODOS	PERÍODOS(s)	FREQÜÊNCIAS(HERTZ)
1	0.070	14.318
2	0.029	34.853
3	0.029	34.853
4	0.020	51.273
5	0.015	65.279
6	0.015	65.279
7	0.013	74.895
8	0.013	74.895
9	0.011	89.425

TABELA VI.31 - Freqüências naturais e períodos

	Nº 12	Nº 13	Nº 14
DESLOCAMENTO Z (m)	6.862×10^{-7}	6.801×10^{-7}	6.862×10^{-7}
ACELERAÇÃO Z (m/s ²)	4.335	4.296	4.335

TABELA VI.32 - Resultados de deslocamentos e acelerações

VI.9 - EXEMPLO 8

Neste exemplo é analisada a estrutura de um queimador, ou flare-boom, constituído de membros tubulares metálicos soldados, cujas plantas se encontram representadas nas figuras VI.32.a e VI.32.b, discretizada numa malha de 87 nós e 154 elementos de pórtico, com 522 graus de liberdade, de acordo com as figuras VI.33.a a VI.33.d. O flare-boom é conectado à plataforma através de três molas lineares, e os equipamentos, tais como passarela e outros, foram considerados como massas concentradas nos nós da estrutura.

O objetivo deste exemplo é a análise da fadiga nas juntas soldadas devido à variação de tensões provocada pela ação dinâmica do vento, tratando-se, portanto, de uma solicitação do tipo aleatória, procedendo-se a uma análise aleatória para a determinação da resposta, de acordo com a referência (56).

Para esta análise, consideram-se duas configurações do flare-boom, uma definitiva e a outra é uma configuração mais flexível, obtida alterando-se as características geométricas de algumas barras.

Nas tabelas VI.33 e VI.34 estão as seis primeiras frequências naturais e períodos das duas configurações, observando-se um pequeno aumento dos períodos para a configuração mais flexível.

De acordo com Blessman (57) e Gould (24), o vento se compõe de um fluxo médio ao qual se superpõem flutuações de fluxo, denominadas rajadas ou turbulências. Desta forma, a ve

locidade do vento pode ser decomposta na soma da velocidade média v_m mais a raiz quadrada do valor médio quadrático da velocidade, relativa à turbulência, ou seja:

$$v_T = v_m \pm \sigma_v \quad (\text{VI.2})$$

onde σ_v é obtido da densidade espectral da componente turbulenta da velocidade, $S_v(f)$, de acordo com a DNV (35) e a equação (IV.91), obtendo-se:

$$\sigma_v = \left[\int_0^\infty S_v(f) df \right]^{1/2} \quad (\text{VI.3})$$

onde

$$S_v(f) = \frac{kv_{10}^2}{f} \frac{4X}{(2+X^2)^{5/6}} \quad (\text{VI.4})$$

f é a frequência em Hertz

v_{10} é a velocidade média horária a 10 m acima do solo

k é um coeficiente de rugosidade cujo valor para mar moderado é 0.0015

$$X = 1800 \frac{f}{v_{10}}$$

A API (38) apresenta outro espectro para o vento, adotando-se, neste trabalho, o da DNV, relativo à equação (VI.4).

A pressão exercida pelo vento de velocidade média v_m , por unidade de área, é dada por:

$$p = \frac{1}{2} \rho C_d v_T^2 = \frac{1}{2} \rho C_d (v_m \pm \sigma_v)^2 \quad (\text{VI.5})$$

Esta equação se reduz a:

$$p = \frac{1}{2} \rho C_d v_m^2 \pm \rho C_d v_m \sigma_v \quad (\text{VI.6})$$

onde

ρ é a massa específica do ar cujo valor é 0.00129 t/m^3
 C_d é um fator de forma, adotando-se 1.5

O termo que interessa, neste caso, é a componente turbulenta, dada por:

$$p' = \rho C_d v_m \sigma_v \quad (\text{VI.7})$$

Para a determinação da velocidade v_m , adotou-se o procedimento da NB-599 (58), onde conhecida a velocidade básica v_{10} , determina-se a velocidade característica através da equação:

$$v_m = v_{10} S_1 S_2 S_3 = v_{10} S \quad (\text{VI.8})$$

onde S_1 , S_2 e S_3 são fatores que variam com a topografia do terreno, dimensões da edificação e altura acima do terreno e grau de segurança da edificação, de acordo com a NB-599.

Desta forma, a equação (VI.7) pode ser expressa por:

$$p' = \rho C_d v_{10} S \sigma_v \quad (\text{VI.9})$$

Neste exemplo considerou-se a estrutura dividida em níveis acima do nível do mar, para a avaliação do fator S e da velocidade v_m .

Substituindo (VI.3) em (VI.7), tem-se que:

$$p' = \rho C_d v_m \left[\int_0^\infty S_v(f) df \right]^{1/2} \quad (\text{VI.10})$$

Elevando (VI.10) ao quadrado, resulta:

$$p'^2 = (\rho C_d v_m)^2 \int_0^\infty S_v(f) df \quad (\text{VI.11})$$

Como p'^2 é, na verdade, o valor médio quadrático da pressão que é igual à variância para média nula, pode-se expressá-lo por:

$$p'^2 = \sigma_p^2 = \int_0^\infty S_p(f) df \quad (\text{VI.12})$$

onde

$$\int_0^\infty S_p(f) df = (\rho C_d v_m)^2 \int_0^\infty S_v(f) df \quad (\text{VI.13})$$

Para se determinar o valor médio quadrático, ou variância, da força aplicada, multiplica-se pela área de influência A , obtendo-se:

$$F'^2 = \sigma_F^2 = (\rho C_d v_m A)^2 \sigma_v^2 \quad (\text{VI.14})$$

onde

$$F = \rho C_d v_m A \quad (\text{VI.15})$$

é a carga aplicada em cada nó.

Combinando-se as equações, chega-se a:

$$S_F(f) = F^2 S_v(f) \quad (\text{VI.16})$$

Em termos matriciais, tem-se que:

$$\underline{S}_F(f) = \underline{F} \underline{S}_v(f) \underline{F}^{*t} \quad (\text{VI.17})$$

Aplicando a equação (VI.17) em (IV.239), obtêm-se:

$$\underline{S}_u(f) = \underline{H}(f) \underline{F} \underline{S}_v(f) \underline{F}^{*t} \underline{H}^{*t}(f) \quad (\text{VI.18})$$

Finalmente:

$$\underline{S}_u(f) = \underline{U}(f) \underline{S}_v(f) \underline{U}^{*t}(f) \quad (\text{VI.19})$$

onde $\underline{S}_v(f)$ é dado por (VI.4)

Obtidas as variâncias dos esforços, as variâncias das tensões efetivas, σ_e^2 , ou hot-spot stresses, são determinadas aplicando-se os fatores de concentração de tensões, de acordo com o item V.3. O desvio padrão, portanto, é σ_e .

Conhecido o desvio padrão σ_e das tensões, pode-se avaliar o número de ciclos associados, de acordo com o procedimento desenvolvido no item IV.3.3.

Para avaliação do número de ciclos admissível, adotou-se a curva X da DNV (35), tomando-se como amplitude da variação de tensões o valor $S = 2\sigma_e$.

Adotou-se a distribuição anual de velocidades do vento, apresentada na tabela VI.35, referente à costa SE do Brasil (59).

O número total de ciclos, NTC, correspondente à velocidade v_{10} considerada, utilizado na equação (V.4), é obtido pelo quociente da duração total em segundos dos ventos com velocidade v_{10} , pelo período de cruzamento zero, ou seja:

$$\text{NTC} = \frac{T}{T_m}$$

onde

$$T = P_{v_{10}} \cdot 360 \cdot 24 \cdot 60^2$$

$P_{v_{10}}$ é a percentagem de ocorrência da veloci-

dade v_{10} , tirada da tabela VI.35

$$T_m = \left\{ \frac{\int_0^\infty S_e(f) df}{\int_0^\infty f^2 S_e(f) df} \right\}^{1/2}$$

S_e é a densidade espectral das tensões.

No gráfico da figura VI.34, estão as curvas da densidade espectral do vento, para cada velocidade v_{10} do histograma, segundo a DNV.

As figuras VI.35 e VI.36 apresentam os gráficos de densidade espectral do deslocamento na direção global Y do nó 1, utilizando-se seis modos de vibração, com e sem correção estática. Observam-se dois picos significativos em duas regiões: o primeiro ocorre logo nas mais baixas frequências, e pode ser explicado pelo pico que ocorre, na mesma região, na curva de densidade espectral de solicitação, conforme figura VI.34. O segundo pico ocorre sobre a primeira frequência natural, e a partir daí, ocorre um pequeno pico sobre a segunda frequência natural, tendendo a curva a zero para as demais frequências.

Na figura VI.37 comparam-se as curvas de densidade espectral do deslocamento Y do nó 1, da geometria definitiva e da geometria mais flexível, podendo-se observar a variação de amplitudes e o deslocamento do segundo pico devido à variação no valor da primeira frequência natural.

Nas tabelas VI.36 e VI.38 são comparados os resultados de vida útil obtidos para as duas configurações, utilizando-se 6 modos com e sem correção dos modos superiores. Podem-se observar grandes diferenças, que no caso particular desta es

trutura não causariam problemas de segurança, mas o interesse, no caso, é avaliar a sensibilidade dos resultados de vida útil, que poderiam causar danos em estruturas mas sensíveis à flutuação de tensões.

Na tabela VI.37 são apresentados resultados de tensões efetivas na junta 77 do brace 42, para cada velocidade de vento, comparando-se os resultados com e sem correção estática, obtendo-se uma diferença média de 20% entre os dois métodos. A esta diferença nas tensões, corresponde uma diferença de 924% na vida útil calculada com e sem correção, devido ao caráter exponencial das curvas S-N.

Na tabela VI.39 são fornecidos resultados de diferença percentual entre vida útil de juntas das duas configurações, utilizando-se seis modos com correção e tomando-se a configuração definitiva como base de comparação. Verifica-se que uma pequena alteração na geometria, com variações de diâmetro e espessura de juntas a nível local, e a uma variação no período natural, a nível global, acarreta em grandes variações no dano e conseqüentemente na vida útil.

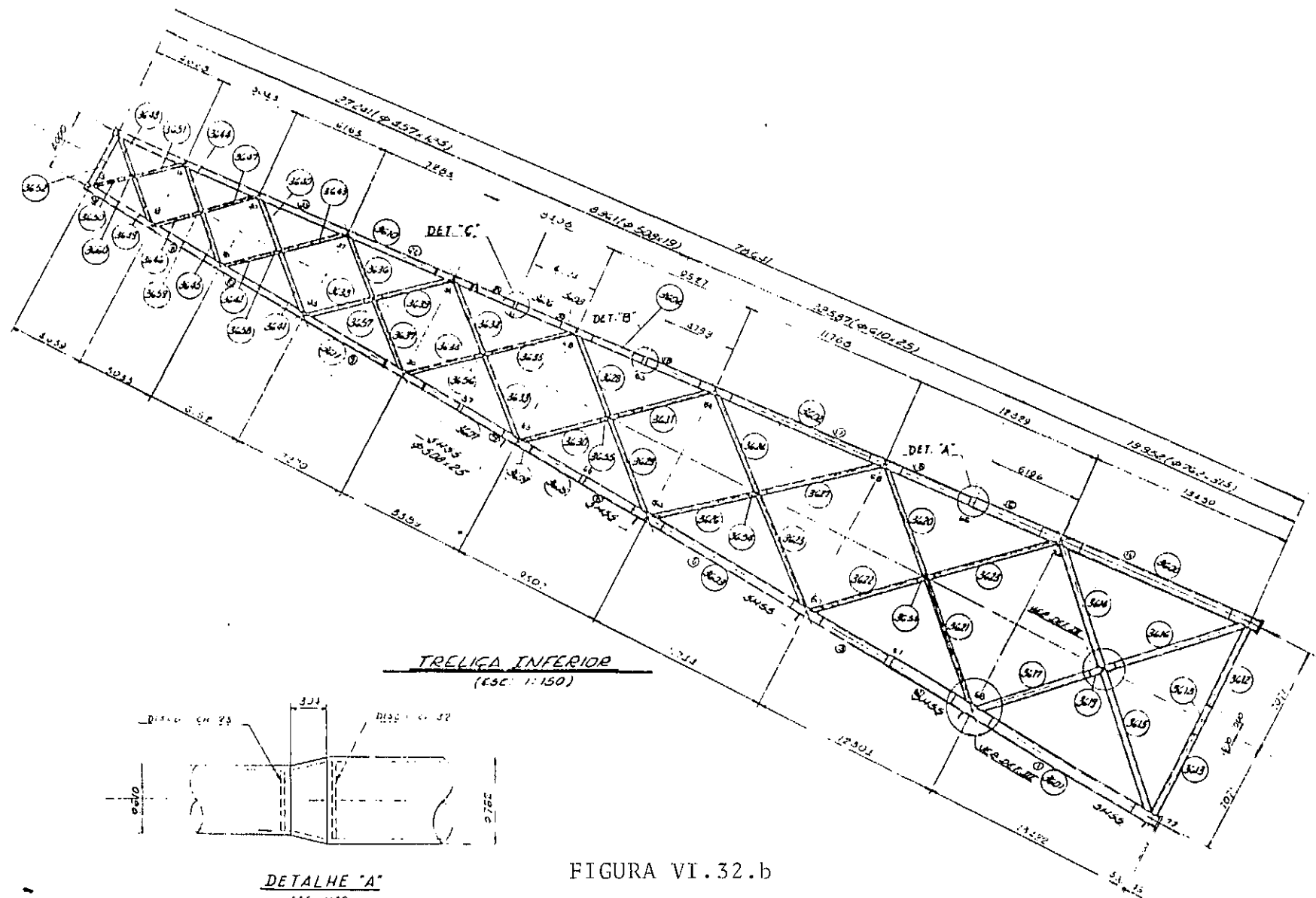


FIGURA VI.32.b

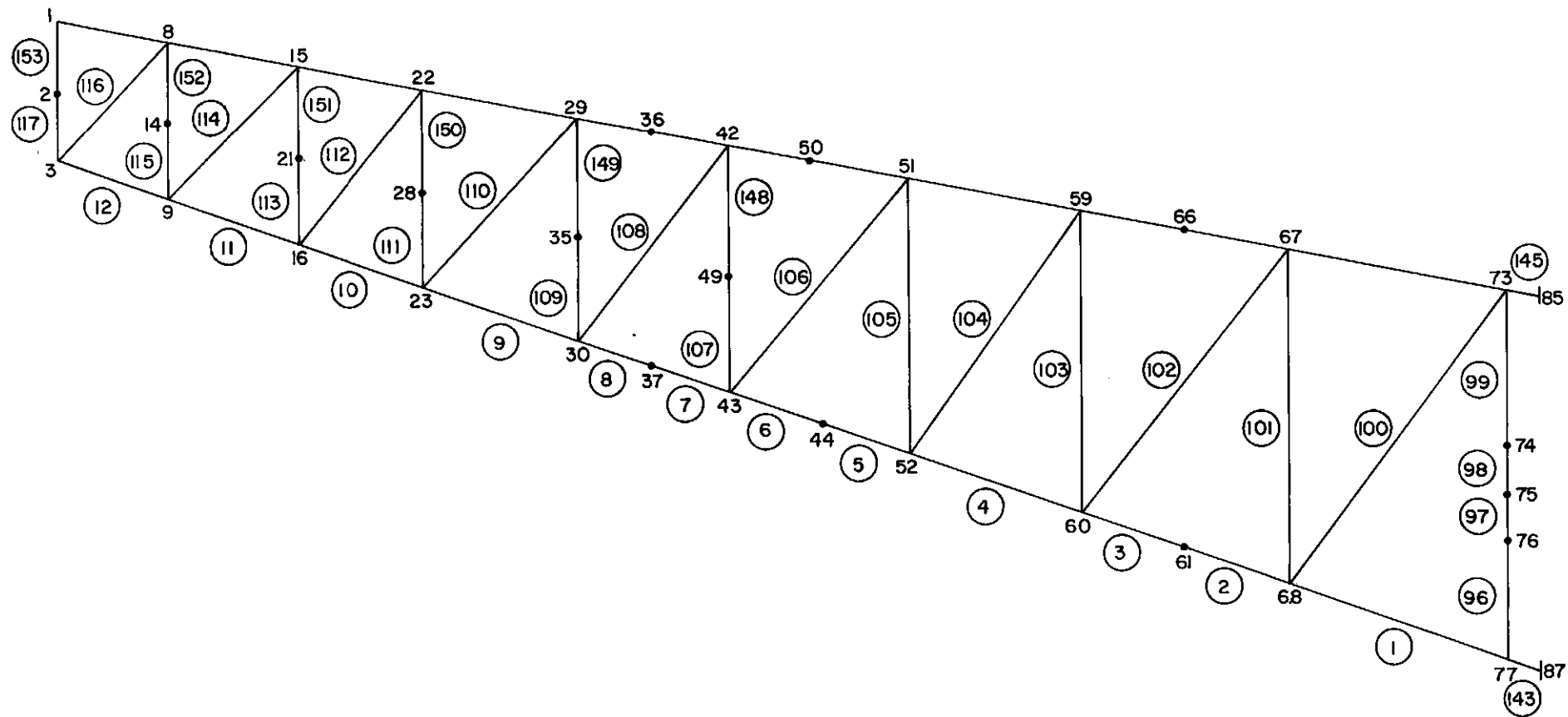


FIGURA VI.33a_Malha do Flare-boom

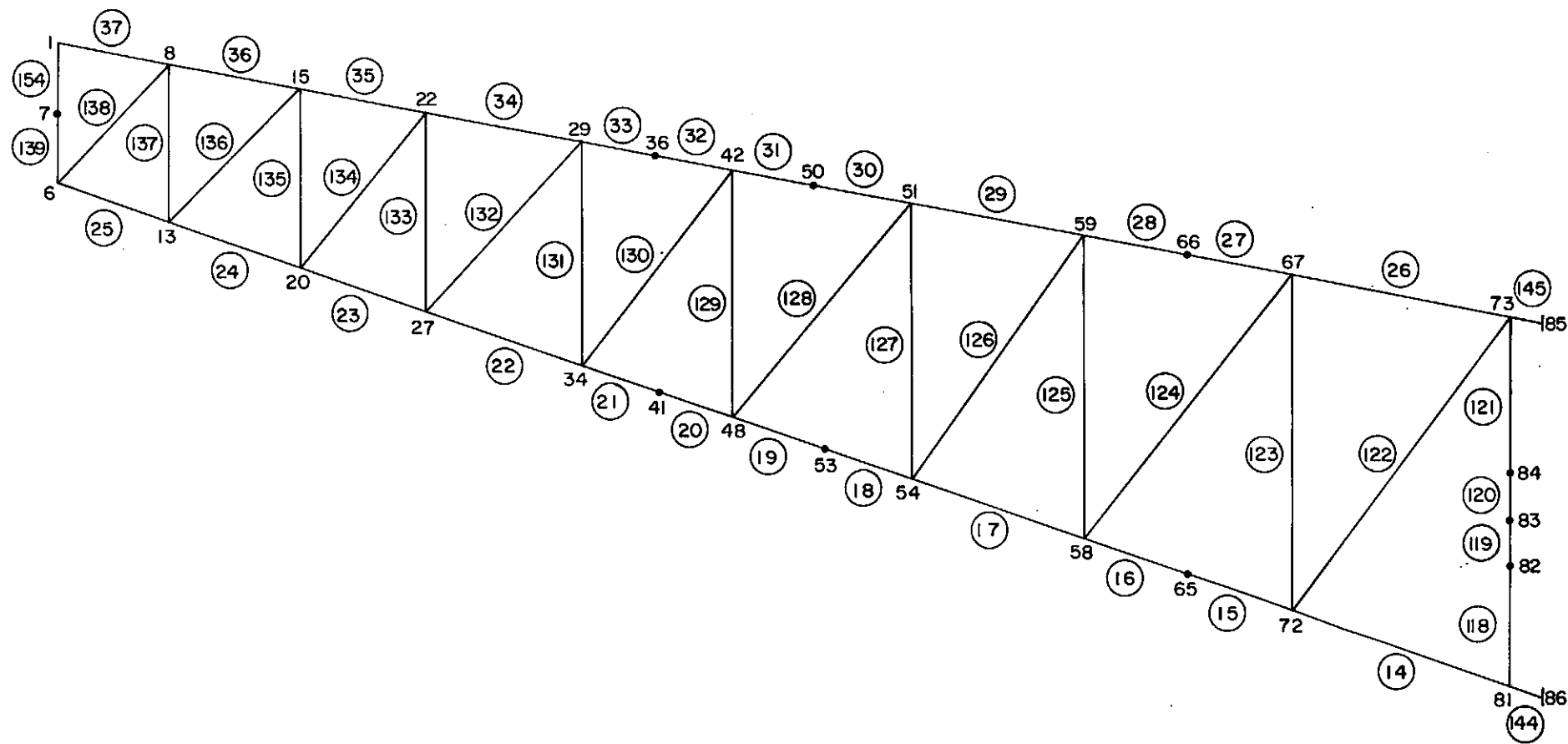


FIGURA VI.33b_Malha do Flare-boom

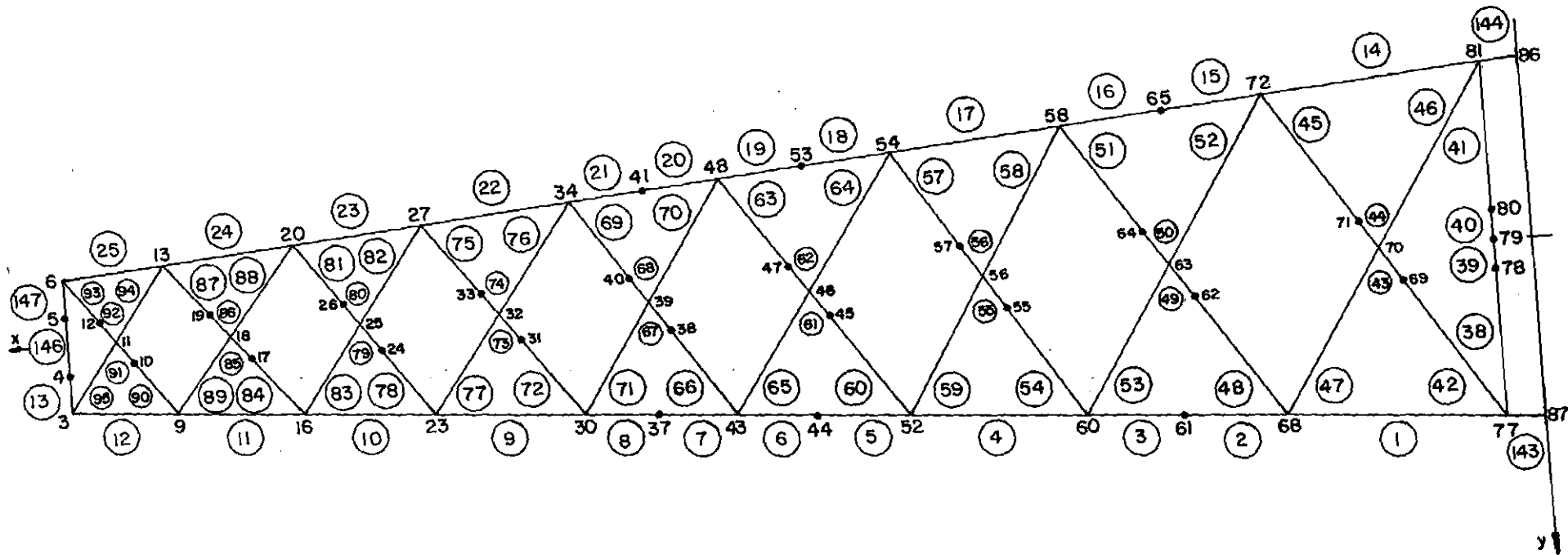


FIGURA VI.33c_Malha do Flare-boom

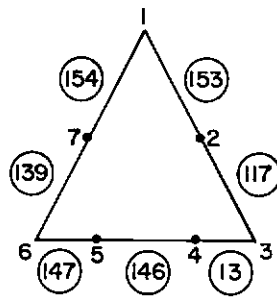
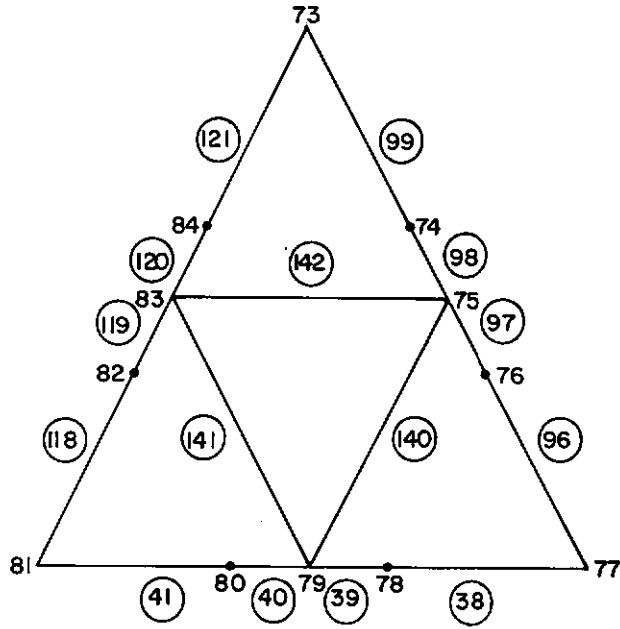


FIGURA VI. 33d _ Malha do Flare-boom

MODOS	PERÍODOS(s)	FREQÜÊNCIA(HERTZ)
1	0.9068	1.103
2	0.7688	1.301
3	0.3799	2.632
4	0.3257	3.071
5	0.3063	3.265
6	0.2642	3.785

TABELA VI.33 - Freqüências naturais e períodos da configuração definitiva do flare-boom

MODOS	PERÍODOS(s)	FREQÜÊNCIA(HERTZ)
1	0.9663	1.035
2	0.8074	1.239
3	0.4100	2.439
4	0.3757	2.662
5	0.3635	2.751
6	0.3313	3.019

TABELA VI.34 - Freqüências naturais e períodos da configuração mais flexível do flare-boom.

VELOCIDADE DO VENTO (mph)	OCORRÊNCIA (%)
2	12.6
7	24.6
12	23.8
17	17.2
22	11.6
27	5.6
32	2.8
37.5	1.3
40+	0.5

TABELA VI.35 - Distribuição anual de velocidades do vento

JUNTA	BRACE	VIDA ÚTIL (ANOS) SEM CORREÇÃO	VIDA ÚTIL (ANOS) COM CORREÇÃO	DIFERENÇA (%)
77	42	385 461	37 661	924
68	48	6 206	6 110	2
60	53	11 524	8 936	29
60	54	3 784	5 791	35
52	59	2 756	5 127	46
73	122	1 873	1 820	3

TABELA VI.36 - Vida útil para configuração definitiva do flare-boom

VELOCIDADE DO VENTO	TENSÕES (kN/m^2) SEM CORREÇÃO	TENSÕES (kN/m^2) COM CORREÇÃO	DIFERENÇA (%)
2	14.943	20.815	28
7	133.68	178.26	25
12	383.62	497.45	23
17	801.81	1025.0	22
22	1375.7	1743.3	21
27	2182.6	2742.	20
32	3086.3	3812.9	19
37.5	4252.2	5197.1	18
40 +	4877.3	5936.4	18

TABELA VI.37 - Tensões na junta 77 do brace 42 para a configuração definitiva

JUNTA	BRACE	VIDA ÚTIL (ANOS) SEM CORREÇÃO	VIDA ÚTIL (ANOS) COM CORREÇÃO	DIFERENÇA (%)
77	42	8262	965	756
68	48	5121	2812	82
60	53	16173	6086	166
60	54	4991	3590	39
52	59	3208	2526	27
73	122	657	400	64

TABELA VI.38 - Vida útil para configuração flexível do flare-boom

JUNTA	BRACE	DIFERENÇA (%)
77	42	97
68	48	54
60	53	32
60	54	38
52	59	51
73	122	78

TABELA VI.39 - Diferença percentual entre a vida útil
de juntas das duas configurações

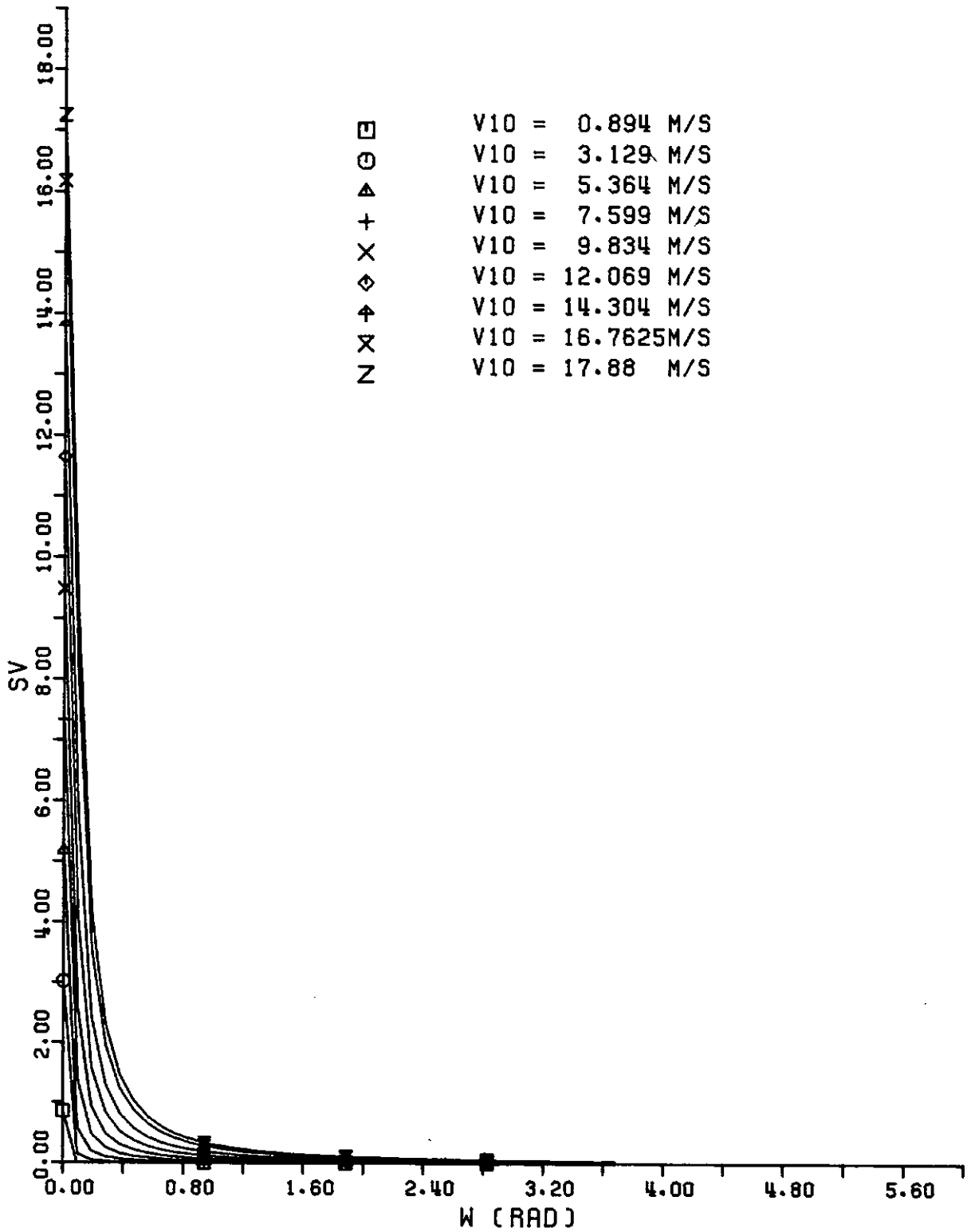


FIGURA VI.34 - DENS. ESPECTRAL DO VENTO

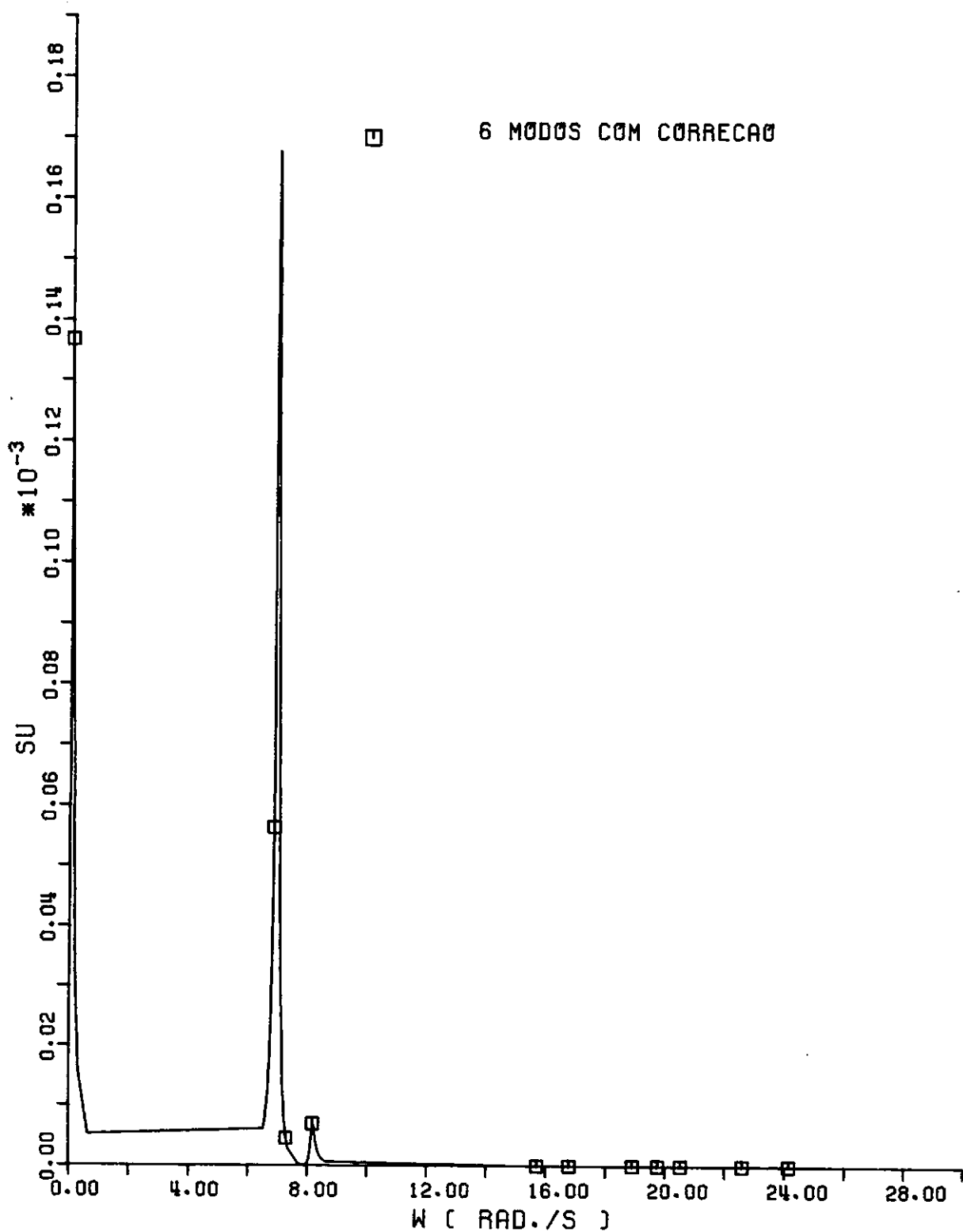


FIGURA VI.35 - DENS. ESPECTRAL DE DESL. - DIR. Y - Nº 1

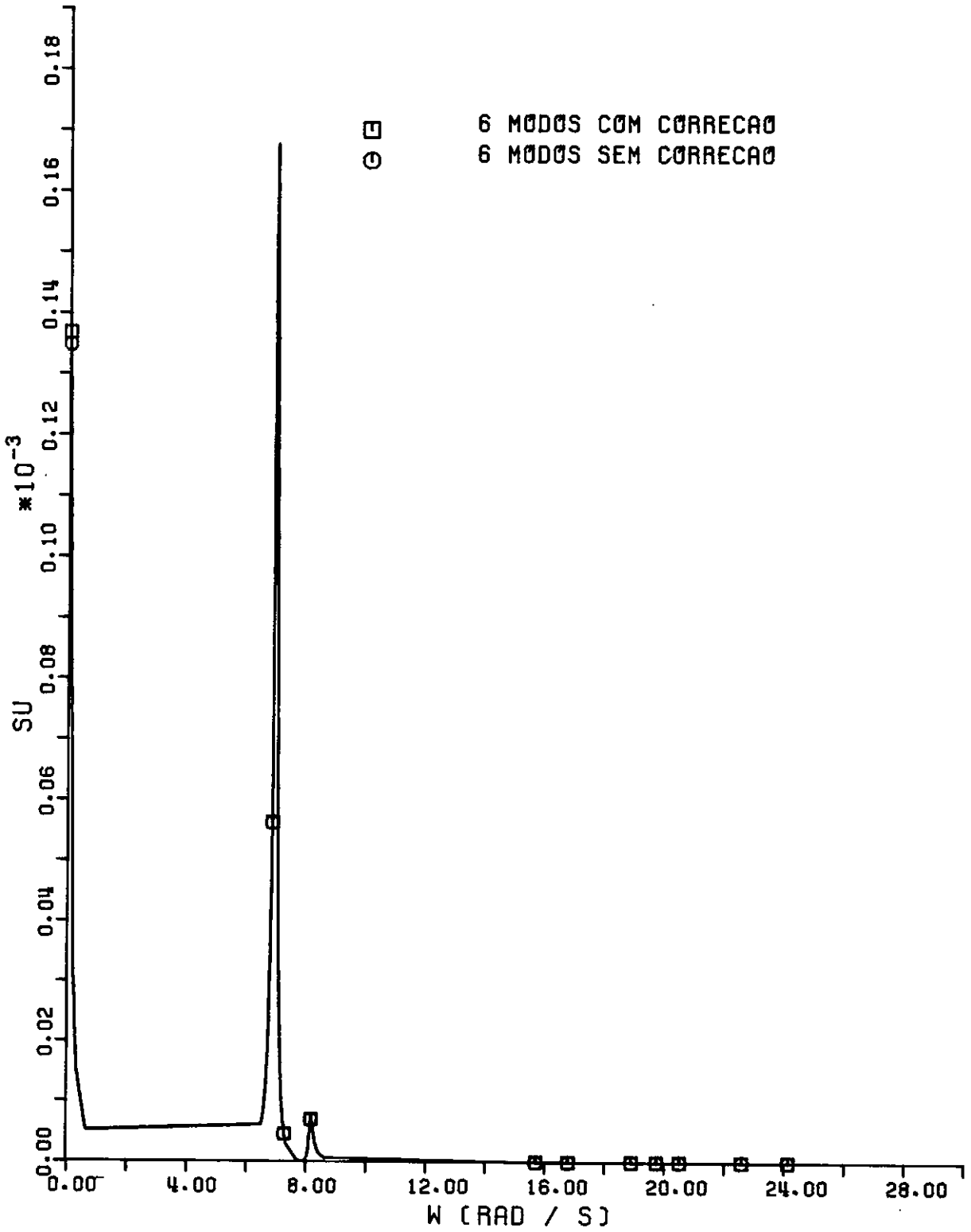


FIGURA VI.36 - DENS. ESPECTRAL DE DESL. - DIR. Y - Nº 1

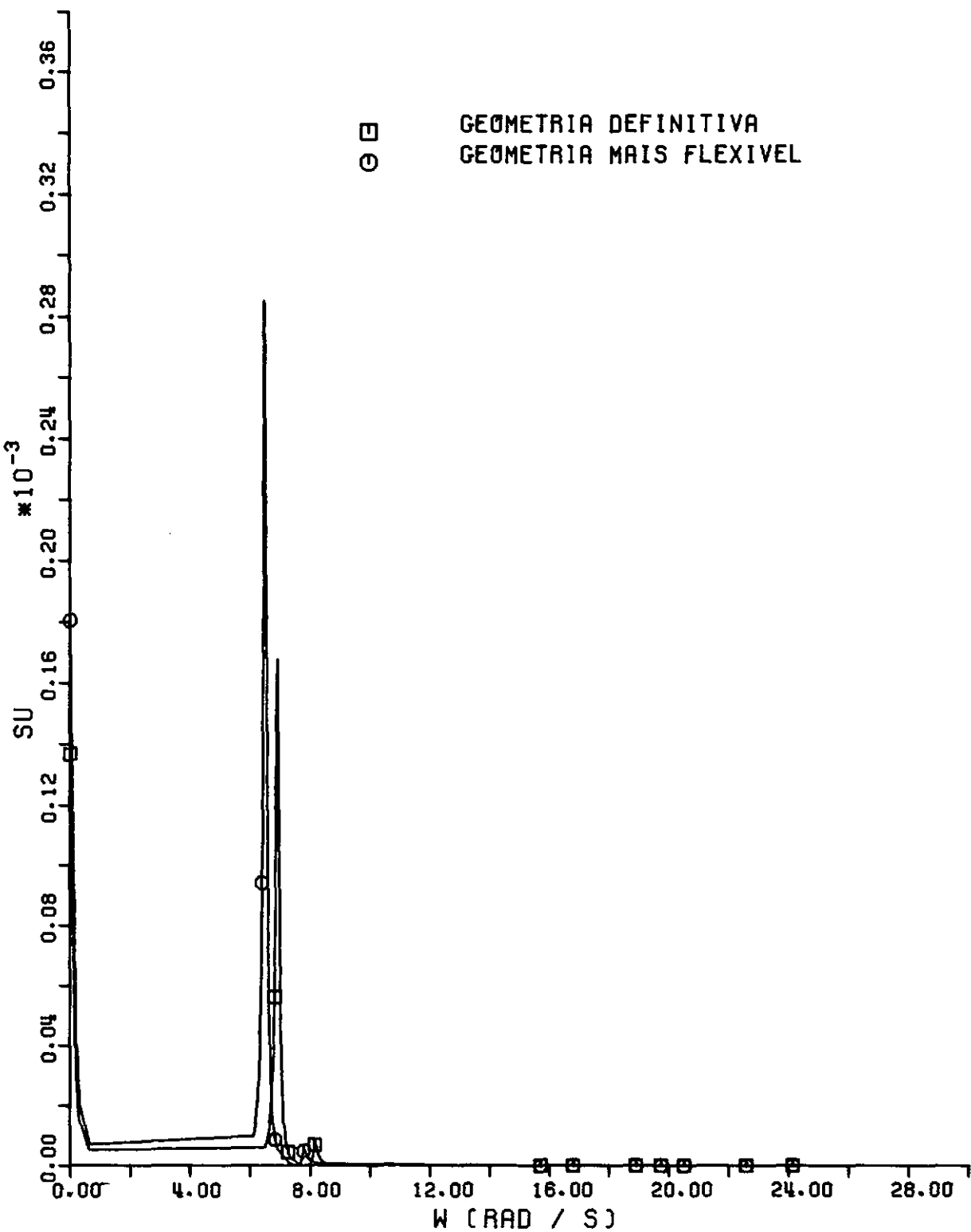


FIGURA VI.37 - DENS. ESPECTRAL DE DESL. - DIR. Y - Nº 1

C A P Í T U L O V I ICONCLUSÕES

As estruturas metálicas soldadas, submetidas à ação de carregamentos dinâmicos, sofrem flutuações de tensões em seus membros que ocasionam o surgimento e propagação de fissuras, constituindo-se no fenômeno de fadiga. O trabalho desenvolvido mostrou a viabilidade de se realizar a verificação da fadiga de estruturas tubulares metálicas soldadas, através de técnicas computacionais adequadas, utilizando-se métodos de análise dinâmica.

Devido ao tipo das curvas S-N, ocorrem grandes variações no resultado de vida útil para pequenas variações de tensões. Isto implica na necessidade de se determinar os esforços e tensões atuantes com suficiente precisão, já que excessivas imprecisões poderão levar a resultados incorretos. Desta forma, deve-se proceder à análise levando-se em consideração os seguintes itens:

- o modelo estrutural adotado deve ser capaz de representar convenientemente todos os detalhes significativos.
- a utilização de uma malha de elementos finitos muito refinada implica num grande número de graus de liberdade, tornando a solução inviável em termos computacionais.
- pode-se adotar uma malha de elementos finitos menos refinada, avaliando-se as tensões efetivas através dos

fatores de concentração de tensões para as juntas mais comuns, de modo a considerar a influência da geometria da junta sobre a concentração das tensões, procedendo-se a uma análise mais detalhada para as juntas mais complexas.

- o carregamento atuante deve ser avaliado de modo a considerar sua variação durante toda a vida útil da estrutura.
- o método de análise deve atender à necessidade de precisão dos resultados de esforços e tensões, além de levar em consideração se o tipo de carregamento aplicado é determinístico ou aleatório.
- deve-se determinar a história da variação das tensões no decorrer da vida útil prevista para a estrutura.

As técnicas de análise implementadas no programa DINFAD permitem a determinação da vida útil de estruturas levando-se em consideração os itens anteriores.

O Método de Superposição Modal, com a correção estática dos modos superiores, permite obter resultados precisos utilizando-se poucos modos de vibração, cujo número pode ser determinado realizando-se uma análise de vibrações livres e verificando-se a relação entre a frequência de excitação e as frequências naturais do sistema. Aplicando-se este método, o sistema de equações diferenciais fica desacoplado, reduzindo o custo computacional envolvido na análise.

Na análise aleatória, trabalhando-se no domínio da frequência, este método é ainda mais conveniente, pois

para cada frequência do espectro há necessidade de se realizar uma análise dinâmica, não sendo interessante a aplicação do Método Direto.

Verifica-se que o espectro da resposta apresenta picos nas regiões onde ocorre o valor máximo do espectro da solicitação e sobre as primeiras frequências naturais. Fica evidenciada, desta forma, a contribuição significativa da parcela dinâmica da resposta em presença da parcela estática correspondente ao valor máximo do espectro da solicitação.

O Método de Superposição Modal Clássico, sem correção dos modos superiores, fornece bons resultados de deslocamentos, velocidades, acelerações e forças de inércia, bem como para esforços nos casos em que os modos adotados sejam suficientes para uma adequada representação do carregamento. No entanto, é sempre aconselhável a utilização da técnica de correção estática devido à dificuldade de se avaliar se os modos são ou não suficientes para a análise.

Verifica-se, também, que a aplicação do Método Direto na análise de estruturas submetidas a solicitações com alta frequência de excitação é satisfatória já que neste caso o amortecimento pode ser eliminado do sistema de equações, o que implica na obtenção de resultados precisos sem grande esforço computacional.

Um outro aspecto é que o modelo estrutural utilizado na análise da fadiga deve ser tão sofisticado quanto o modelo utilizado na análise estática, de modo à obtenção precisa de tensões. Desta forma, é possível utilizar um único modelo

para a realização das diversas análises necessárias ao projeto (estática, dinâmica e fadiga). Esta unificação do modelo estrutural facilita o trabalho do projetista, ao mesmo tempo em que evita possíveis erros na elaboração de modelos distintos, permitindo maior controle sobre as possíveis modificações que ocorrem no decorrer do projeto.

Neste trabalho, a teoria desenvolvida é aplicada a sistemas lineares, porém poderá ser estendida a sistemas com não-linearidades físicas localizadas, através da técnica da linearização equivalente, como no caso da interação solo-estrutura. Para o tratamento de problemas mais complexos, que não se enquadrem nos casos anteriores, as análises poderão ser efetuadas no domínio do tempo, com o auxílio de técnicas de simulação.

B I B L I O G R A F I A

- 1 - CLOUGH, R.W., PENZIEN, J. - Dynamics of Structures, McGraw-Hill, 1975.
- 2 - DYM, C.L., SHAMES, I.H. - Solid Mechanics, McGraw-Hill, 1973.
- 3 - BATHE, K.J. - Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982.
- 4 - BATHE, K.J., WILSON, E.L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, 1976.
- 5 - ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1977.
- 6 - PAZ, Mario - Structural Dynamics, Theory and Computation, van Nostrand Reinhold, 1980.
- 7 - COOK, R.D. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, 1974.
- 8 - PRZEMIENIECKI, J.S. - Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, 1968.
- 9 - LIMA, E.C.P. - LORANE-DINA - Uma Linguagem Orientada para Análise Dinâmica de Estruturas, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.
- 10 - FERRANTE, A.J., BREBBIA, C.A. - The Finite Element Technique, Porto Alegre, Editora da UFRS, 1975.

- 11 - MEIROVITCH, L. - Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, 1975.
- 12 - BREBBIA, C.A., WALKER, S. - Dynamic Analysis of Offshore Structures, Newnes-Butterworths, 1979.
- 13 - ZIENKIEWICZ, O.C., LEWIS, R.W., STAGG, K.G. - Numerical Methods in Offshore Engineering, John Wiley, 1978.
- 14 - BREBBIA, C.A., TOTTENHAM, H., WARBURTON, G.B., WILSON, J., WILSON, R. - Vibrations of Engineering Structures, Computacional Mechanics Ltd., 1976.
- 15 - AYABE, C. - A Técnica da Linearização Equivalente no Cálculo da Resposta Permanente de Plataformas Marítimas Fixas, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1983.
- 16 - LANDAU, L., EBECKEN, N.F.F., LIMA, E.C.P., FERRANTE, A.J. - The Static Contribution of the Higher Modes in the Dynamic Analysis of Offshore Structures - International Symposium of Offshore Engineering, BRASIL OFFSHORE'81, Rio de Janeiro, Setembro 1981.
- 17 - LIMA TORRES, A.L.F., LIMA, E.C.P. - A Contribuição dos Modos Superiores na Análise Dinâmica de Estruturas Reticuladas, 2º Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, SIBRAT, Salvador, novembro 1982.
- 18 - MADDOX, N.R. - On the Number of Modes Necessary for Accurate Response and Resulting Forces in Dynamic Analysis, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, 516-517, June 1975.

- 19 - HANSTEEN, O.E., BELL, K. - On the Accuracy of Mode Superposition Analysis in Structural Dynamics, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 7, 405-411, 1979.
- 20 - CLOUGH, R.W., WILSON, E.L. - Dynamic Analysis of Large Structural Systems with Local Nonlinearities, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, 107-129, 1979.
- 21 - NEWLAND, D.E. - An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis, London, Longman Group Limited, 1975.
- 22 - HURTY, W.C., RUBINSTEIN, M.F.- Dynamics of Structures, Prentice-Hall Inc., 1964.
- 23 - LIN, Y.K. - Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill Inc., 1967.
- 24 - GOULD, P.L., ABU-SITTA, S.H. - Dynamic Response of Structures to Wind and Earthquake Loading, Plymouth, 1980.
- 25 - KREIDER, D., OSTBERG, D.R., KULLER, R.C., PERKINS, F.W. - Introdução à Análise Linear, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A., 1972.
- 26 - BRIGHAM, E.O. - The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall Inc., 1974.
- 27 - VUGHTS, J.H., KINRA, R.K. - Probabilistic Fatigue Analysis of Fixed Offshore Structures, Offshore Technology Conference, NO 2608, 889-906, 1976.

- 28 - MUKHOPADHYAY, A., ITOH, Y., BOWOBAMP, J.C. - Fatigue Behavior of Tubular Joints in Offshore Structures, Offshore Technology Conference, NO 2207, 613-622, 1975.
- 29 - FISHER, P.J. - Summary of Current Design and Fatigue Correlation, Fatigue in Offshore Structural Steels, ICE, February 1981.
- 30 - Background to New Fatigue Design Guidance for Steel Welded Joints in Offshore Structures, Report of the Department of Energy, 'Guidance Notes', Revision Drafting Panel, May 1982.
- 31 - VANDIVER, J.K. - The Sensivity of Fatigue Life Estimates to Variations in Structural Natural Periods, Modal Damping Ratios and Directional Spreading of the Seas, BOSS, volume 2, 1982.
- 32 - EDVARDBSEN, G., HALVORSEN, R. - Calculation of Stress Concentration Factors in Chord and Brace after Different Formulas, DNV, Technical Report NO 81-0367, 1981.
- 33 - POTVIN, A.B., KUANG, J.G., LEICK, R.D., KAHLICH, J.L. - Stress Concentration in Tubular Joints, Society of Petroleum Engineers Journal, 287-299, August 1977.
- 34 - KUANG, J.G., POTVIN, A.B., LEICK, R.D. - Stress Concentration in Tubular Joints, Offshore Technology Conference, NO 2205, 1975.

- 35 - DET NORSKE VERITAS (1977) - "Rules for the Design, Construction and Inspection of Offshore Structures" .
Appendix A - Environmental Conditions, Appendix C - Steel Structures.
- 36 - Fatigue Problems in Offshore Steel Structures, DNV, Sept. 1975.
- 37 - GURNEY, T.R. - Fatigue Design Rules for Welded Steel Joints, The Welding Institute Research Bulletin, May 1976.
- 38 - API RP2A, Planning, Designing, and Constructing Fixed Offshore Platforms, January 1981.
- 39 - CLARK, A.M., DONG-SHI OIAN, HARTT, P.E., GARNECKI, M.F. - Spectrum Fatigue of Welded Structural Steel in Sea Water - Offshore Technology Conference, NO 4525, May 1983.
- 40 - MADDOX, N.R., WILDENSTEIN, A.W. - A Spectral Fatigue Analysis for Offshore Structures - Offshore Technology Conference, NO 2261, May 1975.
- 41 - MAISON, J.R., HOLLIDAY, G.C. - Comparison Between Predicted and Experimentally Determined Low Cycle Fatigue Life of Welded Tubular Connections - Offshore Technology Conference, NO 2208, May 1975.
- 42 - KIUREGHIAN, A. - A Response Spectrum Method for Random Vibration Analysis of MDF Systems - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 9, 419-435, 1981.

- 43 - ANGELIDES, D.C., CONNOR, J.J. - Response of Fixed Offshore Structures in Random Sea, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 8, 503-526, 1980.
- 44 - ATSUTA, T., TOMA, S., KUROBANE, Y., MITSUI, Y. - Fatigue Design of an Offshore Structure - Offshore Technology Conference, NO 2607, May 1976.
- 45 - HART, G.C. - Stochastic Frame Response Using Modal Truncation - Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, EM5, October 1970.
- 46 - MALHOTRA, A.K., PENZIEN, J. - Nondeterministic Analysis of Offshore Structures, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, EM6, December 1970.
- 47 - MADDOX, N.R. - A Deterministic Fatigue Analysis for Offshore Platforms - Journal of Petroleum Technology, July 1975.
- 48 - LIMA, E.C.P., EBECKEN, N.F.F. - Dynamic Analysis of Fixed Offshore Structures on the Brazilian Coast, INTER-MARITEC, IMT 82-102/01, 1982.
- 49 - LIMA, E.C.P., EBECKEN, N.F.F. - Determinação da Fadiga em Juntas Tubulares Soldadas de Plataformas Offshore por Métodos Probabilísticos - 2º Congresso Brasileiro de Petróleo, 1982.
- 50 - LIMA, E.C.P., EBECKEN, N.F.F. - Análise da Fadiga em Estru-

turas Esbeltas sob a Ação do Vento pelo Método dos Elementos Finitos, 2º Colóquio Venezuela-Brasil de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 1981.

- 51 - CHAVEZ, M. - Stochastic Analysis of Gravity Platforms Subjected to Wind Generated Waves, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Applied Science, University of Southampton, September 1976.
- 52 - GODEAU, A.J., DELEUIL, G.E. - Dynamic Response and Fatigue Analysis of Fixed Offshore Structures - Offshore Technology Conference, NO 2260, May 1975.
- 53 - TORSET, O.P., FLOGELAND, S., LUND, J.K. - Fatigue Behavior of Slender Free Standing Towers Subjected to Wind Gustiness and Support Vibration - International Research Seminar on Safety of Structures under Dynamic Loading, 1977.
- 54 - WYLDE, J.G. - Fatigue Tests on Welded Tubular T Joints with Equal Brace and Chord Diameters - Offshore Technology Conference, NO 4527, May 1983.
- 55 - ICES STRUDL II - The Structural Design Language - 1967.
- 56 - LIMA TORRES, A.L.F., LIMA, E.C.P. - Determination of the Fatigue Life of a Flare Boom Structure by a Random Modal Superposition Method - Brazil Offshore 83, International Symposium on Offshore Engineering, 1983.
- 57 - BLESSMAN, J. - Ação do Vento em Estruturas Marítimas, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, Porto Alegre.

- 58 - NB 599 - Forças Devidas ao Vento em Edificações, ABNT, 1978.
- 59 - Glem and Associates - Meteorological - Oceanographic Conditions Affecting Offshore Petroleum Facilities in the Garoupa Field, Julho 1976.
- 60 - LIMA, E.C.P., LANDAU, L.L., EBECKEN, N.F.F. - Manual do Usuário e de Operação do Programa DINA - COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil, Março 1981.
- 61 - LIMA, E.C.P., ELLWANGER, G.B., ALVES, J.L.D., JACOB, B.P. - Relatório referente às análises da sexta, sétima e oitava (parcial) configuração da AE48, COPPETEC - ET 15 185, 1983.

A P Ê N D I C E A

LISTA DE FÓRMULAS PARAMÉTRICAS SEMI-EMPÍRICAS PARA DETERMINAÇÃO
DOS FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES
EM JUNTAS TUBULARES SOLDADAS

As fórmulas que se seguem foram desenvolvidas por Kuang, Gibstein, Smedley e Marshall para as juntas tipo T, Y, K e X (figura V.3), submetida a esforços axiais e momentos no plano e fora do plano da junta (figura V.5).

Foi adotada a notação abaixo, relacionada à figura A.1:

T = espessura da parede do chord

t = espessura da parede do brace considerado

R = raio externo da seção do chord

r = raio externo da seção do brace considerado

θ = ângulo entre brace e chord

D = diâmetro externo da seção do chord

a = distância (gap) entre o brace considerado e o brace mais próximo, submetido a carregamento, distância esta medida na superfície do chord

L = comprimento do chord

$\beta = r/R$

$\gamma = R/T$

$g = a/D$

$\tau = t/T$

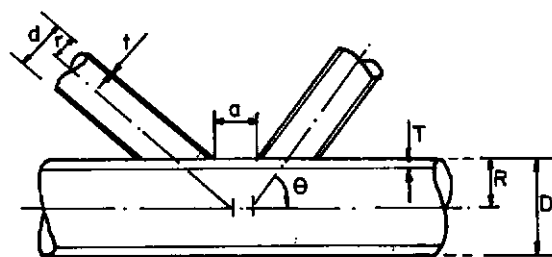
$$\alpha = L/D$$

Para as fórmulas de Marshall, há as seguintes diferenças:

$$\gamma = \frac{(D-T)}{2T}$$

$$a_r = \exp \left[-(0.5T + t) / \sqrt{0.5dt} \right]$$

As fórmulas estão relacionadas nas tabelas A.1 a A.5.



JUNTA K

FIGURA A-1 _ Notação adotada para as características geométricas

TABELA A.1 - Fórmulas de Kuang para juntas tipo Y.

F Ó R M U L A		Intervalo de Validade
Chord: $FCT = 2.060\gamma^{0.808}e^{-1.2\beta^3}\tau^{1.333}\alpha^{0.057}\text{sen}^{1.694}\theta$	força axial	(1)
Brace: $FCT = 4.076\gamma^{0.55}e^{-1.35\beta^3}\tau\alpha^{0.12}\text{sen}^{1.94}\theta$		(1)
Chord: $FCT = 0.702\gamma^{0.6}\beta^{-0.04}\tau^{0.86}\text{sen}^{0.57}\theta$	momento no plano da junta	(1)
Brace: $FCT = 1.301\gamma^{0.23}\beta^{-0.38}\tau^{0.38}\text{sen}^{0.21}\theta$		(1)
Chord: $FCT = 1.024\gamma^{1.014}\beta^{0.787}\tau^{0.889}\text{sen}^{1.557}\theta$ $FCT = 0.462\gamma^{1.014}\beta^{-0.619}\tau^{0.889}\text{sen}^{1.557}\theta$	momento fora do plano da junta	(1) $0.3 \leq \beta \leq 0.55$ $0.55 \leq \beta \leq 0.75$
Brace: $FCT = 1.52\gamma^{0.852}\beta^{0.801}\tau^{0.543}\text{sen}^{2.033}\theta$ $FCT = 0.796\gamma^{0.852}\beta^{-0.281}\tau^{0.543}\text{sen}^{2.033}\theta$		(1) $0.3 \leq \beta \leq 0.55$ $0.55 \leq \beta \leq 0.75$
(1) $8.3 < \gamma < 33.3$ $0.3 < \beta < 0.88$ $0.2 < \tau < 0.80$ $7 < \alpha < 40$ $0 < \theta < 90^\circ$		

TABELA A.2 - Fórmulas de Kuang para juntas tipo K.

F Ó R M U L A		Intervalo de Validade
força axial	Chord: $FCT = 1.51\gamma^{.666}\beta^{-.059}\tau^{1.104}g^{.067}\text{sen}^{1.521}\theta$	(1) $30^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$
	Brace: $FCT = 0.920\gamma^{.157}\beta^{-.441}\tau^{.560}g^{.058}e^{1.448}\text{sen}\theta$	(1) $30^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$
momento no plano da junta	Chord: $FCT = 1.822\gamma^{0.38}\beta^{0.06}\tau^{0.94}\text{sen}^{0.9}\theta$	(1) $0^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$
	Brace: $FCT = 2.827\beta^{-0.35}\tau^{0.35}\text{sen}^{0.5}\theta$	(1) $0^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$
(1) $8.3 \leq \gamma \leq 33.3$ $0.3 \leq \beta \leq 0.88$ $0.2 \leq \tau \leq 0.80$ $0.01 \leq g \leq 1.0$		

TABELA A.3 - Fórmulas de Gibstein para juntas tipo T.

F Ó R M U L A		Intervalo de Validade
força axial	Chord: $FCT = [1.5 - 3.88 (\beta - 0.47)^2] \gamma^{0.87} \tau^{1.37} \alpha^{0.06}$	$0.225 \leq \beta \leq 0.9$ $10 \leq \gamma \leq 30$ $0.4 \leq \tau \leq 1.0$ $3.5 \leq \alpha \leq 8.0$
	Brace: $FCT = 0.655 [1.09 - 1.93 (\beta - 0.5)^2] \gamma^{0.75} \tau^{0.57} \alpha^{0.12}$	$0.3 \leq \beta \leq 0.9$ $10 \leq \gamma \leq 30$ $0.47 \leq \tau \leq 1.0$ $3.5 \leq \alpha \leq 8.0$
momento no plano da junta	Chord: $FCT = [1.65 - 1.1 (\beta - 0.42)^2] \gamma^{0.38} \tau^{1.05}$	$0.225 \leq \beta \leq 0.9$ $10 \leq \gamma \leq 30$ $0.4 \leq \tau \leq 1.0$
	Brace: $FCT = [0.95 - 0.65 (\beta - 0.41)^2] \gamma^{0.39} \tau^{0.29}$	$0.3 \leq \beta \leq 0.9$ $10 \leq \gamma \leq 30$ $0.47 \leq \tau \leq 1.0$
momento fora do plano da junta	Chord: $FCT = [1.01 - 3.36 (\beta - 0.64)^2] \gamma^{0.95} \tau^{1.18}$	$0.225 \leq \beta \leq 0.9$ $10 \leq \gamma \leq 30$ $0.4 \leq \tau \leq 1.0$
	Brace: $FCT = [0.76 - 1.92 (\beta - 0.72)^2] \gamma^{0.89} \tau^{0.47}$	$0.3 \leq \beta \leq 0.9$ $10 \leq \gamma \leq 30$ $0.47 \leq \tau \leq 1.0$

TABELA A.4 - Fórmulas de Smedley para juntas tipo X.

F Ó R M U L A		Intervalo de Validade
força axial	Chord: Sadle position $FCT = 1.35\gamma\tau\beta(2.42-2.28\beta^{2.2}) \sin^{\beta^2}(15-14.4\beta)_\theta$	
	Brace: $FCT = 0.794 + 0.63 FCT_{Chord}$	
momento no plano da junta	Chord: crown position $FCT = 0.595\gamma^{0.6} \tau^{0.8}(1.6\beta^{0.25}-0.7\beta^2)\sin^{(1.5-1.6\beta)}_\theta$	
	Brace: $FCT = 0.794 + 0.63 FCT_{Chord}$	
momento fora do plano da junta	Chord: Saddle position $FCT = 0.794\gamma\tau\beta(1.56-1.46\beta^5)\sin^{\beta^2}(15-14.4\beta)_\theta$	
	Brace: $FCT = 0.794 + 0.63 FCT_{Chord}$	

TABELA A.5 - Fórmulas de Marshall para juntas tipo K.

F Ó R M U L A	
força axial	Chord: $FCT_x = 1.8 (\tau \sin \theta \sqrt{\gamma})$
	$FCT = 1.0 + 0.6 Q_r (1.0 + \sqrt{\frac{\tau}{\beta}} FCT_x) \geq 1.8$
momento no plano da junta	Chord: $FCT_I = 1.2 (\tau \sin \theta \sqrt{\gamma})$
	$FCT = 1.0 + 0.6 Q_r (1.0 + \sqrt{\frac{\tau}{\beta}} FCT_I) \geq 1.8$
momento fora do plano da junta	Chord: $FCT_o = 2.7 (\tau \sin \theta \sqrt{\gamma})$
	$FCT = 1.0 + 0.6 Q_r (1.0 + \sqrt{\frac{\tau}{\beta}} FCT_o) \geq 1.8$